מבחן באלגוריתמים קומבינטוריים - 28.1.2019

משך המבחן 3 שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקיצור ובבהירות. ענה על כל חמש השאלות. **בהצלחה!**

1. תהא A קבוצה <u>ממויינת</u> בת n^2 איברים, ותהא B קבוצה <u>לא ממויינת</u> בת n איברים. נניח כי $A \cap B = \emptyset$ ונסמן $C = A \cup B$.

   א. (10 נקודות) תן אלגוריתם יעיל למיון C. נתח את סיבוכיות האלגוריתם כפונקציה של n.

   ב. (10 נקודות) האם קיים אלגוריתם למיון C, המבצע על כל קלט כנ"ל לכל היותר $1.5n\log_2 n + 100n$ השוואות?

2. א. (10 נקודות) יהא $G = (V, E)$ גרף קשיר עם פונקציית משקל על הקשתות $w : E \to \mathbb{R}$. תהא $e \in E$ צלע כך שלכל מעגל פשוט (שאינו חותך את עצמו) C המכיל את e מתקיים

$$w(e) \leq \max\{w(f) : e \neq f \in C\}.$$

   <u>הוכח</u>: e מוכלת בעץ פורש מינימלי ב- G.

   ב. (10 נקודות) יהא $K_n = (V, E)$ הגרף השלם על קבוצת הקדקדים $V = \{1, \ldots, n\}$. (כלומר, E כוללת את כל הצלעות $\{i, j\}$ עבור $1 \leq i < j \leq n$). נסמן ב- Ω_n את אוסף כל פונקציות המשקל החד-חד ערכיות $w : E \to \{1, 2, \ldots, \binom{n}{2}\}$. יהא $f(w)$ משקלו של עץ פורש מינימלי של K_n ביחס לפונקציית המשקל w.
   <u>חשב</u> את

$$M_n = \max\{f(w) : w \in \Omega_n\}.$$

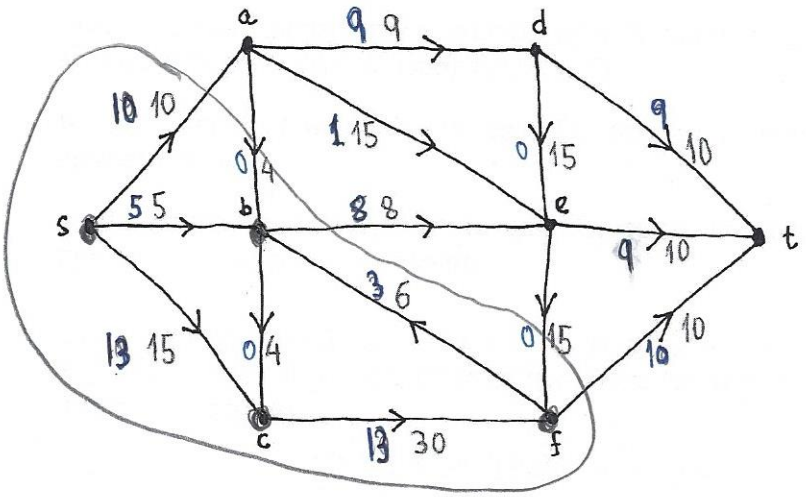
   (במילים: לכל צלע ב- K_n תן משקל שונה מתוך הקבוצה $\{1, \ldots, \binom{n}{2}\}$, כך שמשקל העץ הפורש המינימלי המתקבל יהיה הגדול ביותר, ובטא משקל זה כפונקציה של n).

3. נגדיר פונקציה $E : \mathbb{Z}_{165}^* \to \mathbb{Z}_{165}^*$ ע"י $E(x) = x^{51} \pmod{165}$.

   א. (10 נקודות) מצא d כך שהפונקציה $D : \mathbb{Z}_{165}^* \to \mathbb{Z}_{165}^*$ הנתונה ע"י $D(y) = y^d \pmod{165}$, מקיימת $D(E(x)) = x$ לכל $x \in \mathbb{Z}_{165}^*$.

   ב. (10 נקודות) נתון כי $E(m) = 2$. מצא את m.

4. א. (10 נקודות) מצא זרימה מקסימלית וחתך מינימלי ברשת הזרימה הבאה (הקבולים מסומנים על הקשתות).



ב. (10 נקודות) יהיו $m, n \geq 1$ מספרים טבעיים ותהא S קבוצה של זוגות:

$$S \subset \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}.$$

נסמן ב־ $M_S(m,n)$ את אוסף המטריצות מסדר $m \times n$ של מספרים שלמים אי־שליליים $A = (a_{ij})$, המקיימות $a_{ij} = 0$ לכל $(i,j) \in S$.
בהנתן m, n, S וכן שני וקטורים של מספרים שלמים אי־שליליים

$$r = (r_1, \ldots, r_m) \quad , \quad c = (c_1, \ldots, c_n)$$

תן אלגוריתם יעיל המכריע האם קיימת מטריצה $A = (a_{ij}) \in M_S(m,n)$ כך שלכל $1 \leq i \leq m$ מתקיים

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = r_i \quad ,$$

ולכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = c_j \quad .$$

5. שלשת הסעיפים בשאלה זו אינם קשורים זה לזה.

א. (10 נקודות) נבצע חפוש עומק על הגרף המכוון $G = (V, E)$, ויהא T יער ה־ DFS המתקבל. יהא $d(u)$ זמן הפתיחה של הקדקד u, ו־ $f(u)$ זמן הסגירה של u.
נניח כי G אינו מכיל מעגלים מכוונים, וכי $u_1 \to u_2 \to u_3$ הוא מסלול מכוון ב־ G. האם בהכרח $f(u_3) < f(u_1)$? הוכח, או הבא דוגמא נגדית.

ב. (5 נקודות) תהא f פונקציה מהשלמים האי־שליליים למספרים הממשיים המקיימת $f(0) = 1$, כך שלכל $n \geq 1$ מתקיים

$$f(n) \leq 20n + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + f(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + f(\lfloor \frac{n}{6} \rfloor).$$

תן חסם עליון הדוק (עד כדי קבוע כפלי) ל־ $f(n)$.

ג. (5 נקודות) תהא g פונקציה מהשלמים האי־שליליים למספרים הממשיים המקיימת $g(0) = 1$, כך שלכל $n \geq 1$ מתקיים

$$g(n) \leq 100n + g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + g(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + g(\lfloor \frac{n}{7} \rfloor).$$

תן חסם עליון הדוק (עד כדי קבוע כפלי) ל־ $g(n)$.