שאלה מס' 1

תהא $p=(0,0,0)$ ותהא $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת $f(p)=0$ ו־ $\nabla f(p)=(1,2,2)$. יהא S המשטח הנתון ע"י $f(x,y,z)=0$. יהא T המשטח $z=-2x-3y^2$.

א. (8 נקודות) ויהא C עקום החיתוך של S ו־ T. כוון המשיק ל־ C בנקודה p הוא:

$(1,2,3)$ $(2,4,2)$ $(2,3,-4)$ $(4,3,5)$ $(1,-2,4)$ $(4,-3,-1)$ $(0,0,0)$ $(1,2,2)$

ב. (8 נקודות) נתונה פונקציה $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המקיימת $\frac{\partial h}{\partial y}(p)=4$. כמו וכן נתון כי h מקבלת מקסימום על המשטח S בנקודה p.

$\frac{\partial h}{\partial x}(p)+\frac{\partial h}{\partial z}(p)$ שווה ל:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

ג. (8 נקודות) יהא M המשטח הנתון ע"י

$$M=\{\ (x,y,-2x-3y^2)\in\mathbb{R}^3\ :\ 0\le y\le 1\ ,\ 0\le x\le\sqrt{5+36y^2}\ \}.$$

שטח המשטח M שווה ל:

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

שאלה מס' 2

נתון תחום E ב־ $\mathbb{R}^3$ עם שפה $S = \partial E$ המכוונת מחוץ ל־ E.
נתון כי $vol(E) = 1$ וכי $\int_E (x^2 + y^2 + z^2) dx\, dy\, dz = 1$.
יהא F השדה הוקטורי $F(x, y, z) = (x^3 + 3xy^2, 3yz^2 + 4y, 5z)$.

א. (8 נקודות) אינטגרל השטף $\int_S F\, d\sigma$ שווה ל:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

ב. (8 נקודות) תהא Γ האליפסה המתקבלת מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ עם המישור $z = x + y$.
נכוון את Γ נגד כיוון השעון כאשר מביטים מנקודה גבוהה על ציר ה־ z החיובי.
האינטגרל הקווי $\int_\Gamma F\, dr$ שווה ל:

$\frac{3\pi}{2}$ 4 $2\pi + 3$ $\frac{\pi}{2}$ 2π 0 2 $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5}{2}$ $\pi + 2$ $2\pi + 2$ 4π

שאלה מס' 3

נתונה ההעתקה $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ע"י:

$$\phi(x, y, z) = (x^2 - y^2, y^2 + z^2, z^2 - x^2).$$

יהא $\delta > 0$. תהא C_δ הקוביה

$$C_\delta = \{(x, y, z) : 1 \le x, y, z \le 1 + \delta\}$$

ויהא S_δ הריבוע

$$S_\delta = \{(x, y, 1) : 1 \le x, y \le 1 + \delta\}.$$

א. (8 נקודות) סמן את הקירוב הטוב ביותר מבין האפשרויות הבאות לנפח התמונה $vol(\phi(C_\delta))$ כאשר $0 < \delta$ שואף לאפס:

$4\delta^2$ $4\delta^3$ $8\delta^2$ $8\delta^3$ $12\delta^2$ $12\delta^3$ $16\delta^2$ $16\delta^3$ $20\delta^2$ $20\delta^3$

ב. (8 נקודות) סמן את הקירוב הטוב ביותר מבין האפשרויות הבאות לשטח התמונה $area(\phi(S_\delta))$ כאשר $0 < \delta$ שואף לאפס:

$\sqrt{6}\delta^3$ $\sqrt{6}\delta^2$ $4\sqrt{2}\delta^2$ $12\delta^3$ $8\sqrt{5}\delta^2$ $5\delta^3$ $6\sqrt{3}\delta^2$ $12\delta^2$ $4\sqrt{3}\delta^2$ $2\delta^2$

שאלה מס' 4

תהא $A = \mathbb{R}^3 - \{(0,2,0)\}$. נגדיר שדה וקטורי F על A ע"י

$$F(x,y,z) = \frac{(x, y-2, z)}{(x^2 + (y-2)^2 + z^2)^{3/2}}$$

נגדיר משטחים S ו־ T ע"י

$$S = \{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 10\} \qquad T = \{(x,y,z) \ : \ x^4 + y^4 + z^4 = 10\}$$

עם נורמלים המצביעים החוצה.

א. (8 נקודות) $div\, F =$ $\boxed{0}$

ב. (8 נקודות) $\int_S F\, d\sigma$ שווה ל:

5π $\quad$ 4π $\quad$ 3π $\quad$ 2π $\quad$ π $\quad$ 0 $\quad$ $-\pi$ $\quad$ -2π $\quad$ -3π $\quad$ -4π $\quad$ -5π

ג. (8 נקודות) $\int_T F\, d\sigma$ שווה ל:

5π $\quad$ 4π $\quad$ 3π $\quad$ 2π $\quad$ π $\quad$ 0 $\quad$ $-\pi$ $\quad$ -2π $\quad$ -3π $\quad$ -4π $\quad$ -5π

ד. (5 נקודות) האם קיים שדה וקטורי H המוגדר על A ומקיים $\nabla \times H = F$?
הקף בעגול את התשובה הנכונה ונמק בקצרה.

כן $\qquad$ לא

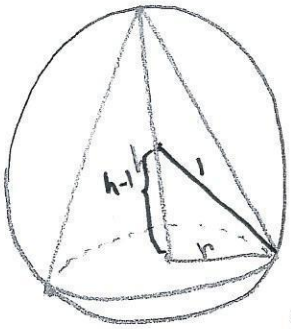
נימוק:

לניא קשירה שקיים H כך ש- $\nabla \times H = F$

אזי לפי משפט סטוקס ולפי סעיף ג'

$$0 = \oint_{\partial S} H\, dr = \int_{S} H\, dr = \int_S \nabla \times H\, d\sigma = \int_S F\, d\sigma = 4\pi$$

סתירה !



שאלה מס' 5

יהא $C(r,h)$ החרוט הישר שגובהו h ורדיוס בסיסו r המוכל בכדור היחידה $B=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1\}$, כך שקדקדו נמצא בקוטב הצפוני של B ושפת בסיסו מוכלת בשפה של B.

א. (5 נקודות) מצא את הקשר בין r ל־ h.

$$r^2+(h-1)^2=1$$

ב. (10 נקודות) מצא בעזרת סעיף א' וכופלי לגרנז' (או בשיטה אחרת) את הערך המקסימלי של $vol(C(r,h))$ מבין כל נפחי החרוטים $C(r,h)$.

נסמן

$$f(r,h)=vol(C(r,h))=\frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$g(r,h)=r^2+(h-1)^2-1$$

אנו מחפשים

$$\max\{f(r,h) : g(r,h)=0\}.$$

לפי כופלי לגרנז', נמצא נקודות (r,h) קריטיות כך ש:

$$\frac{\pi}{3}(2rh, r^2) = \nabla f(r,h)=\lambda\nabla g(r,h)=\lambda(2r, 2(h-1)).$$

לכן

$$\frac{2\pi rh}{3}=2r\lambda \Leftarrow \lambda=\frac{\pi h}{3}$$

ולכן

$$\frac{\pi r^2}{3}=\frac{\pi h}{3}2(h-1) \Leftarrow r^2=2h(h-1).$$

ולכן

$$1=r^2+(h-1)^2=2h(h-1)+(h-1)^2=3h^2-4h+1$$

$$\Leftarrow 3h^2=4h \Leftarrow \boxed{h=\frac{4}{3}} \Leftarrow \boxed{r=\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\Leftarrow \boxed{f(r,h)=\frac{32}{81}\pi}$$

2.א. נורמל ל-S בנק' p הוא $\nabla f(p) = (1,2,2)$

אם $g(x,y,z) = 2x+3y^2+z$, אזי הנורמל ל-T בנק' p

הוא

$$\nabla g(p) = (2, 6y, 1)\Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = (2,0,1)$$

ולכן $\nabla f(p) \times \nabla g(p) = (1,2,2)\times(2,0,1) = (2,3,-4)$ מגדיר ל-C=S∩T ב-p.

ב. לפי כופלי לגרנז' קיים λ כך ש

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}(p), \frac{\partial h}{\partial y}(p), \frac{\partial h}{\partial z}(p)\right) = \nabla h(p) = \lambda \nabla f(p) = \lambda(1,2,2).$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(p) + \frac{\partial h}{\partial z}(p) = 2(1+2) = 6 \quad \Leftarrow \quad \lambda = 2 \quad \Leftarrow \quad \frac{\partial h}{\partial y}(p) = 4$$

ג. נסמן $A = \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{5+36y^2}\}$, אזי

$\varphi : A \to M$ המוגדרת ע"י $\varphi(x,y) = (x, y, 2x+3y^2)$ הינו פרמטריזציה

של M.

$$N_\varphi(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{matrix}(1,0,2)\\(0,1,6y)\end{matrix} \times = (-2,6y,1).$$

ולכן $|N_\varphi(x,y)| = \sqrt{5+36y^2}$. לכן

$$\text{area } M = \int_{(x,y)\in A} \sqrt{5+36y^2}\, dx\, dy = \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=0}^{\sqrt{5+36y^2}} dx \right) \sqrt{5+36y^2}\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{1} (5+36y^2)\, dy = 5 + \frac{36}{3} = 17$$

.2 .ל

$$\int_S F\,d\sigma = \int_E \operatorname{div} F = \int_E \left[(3x^2+3y^2)+(3z^2+4)+5\right] dx\,dy\,dz$$

$$= 3\int_E (x^2+y^2+z^2) + 9\int_E 1 = 3+9 = 12$$

.ג לגבי T הנתונה

$T = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 \le 1,\ z = x+y\}$

עם נורמלי $(-1,-1,1)$. אז $\Gamma = \partial T$.

לפי פרמטריזציה $\varphi: B \to T$

$B = \{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1\}$ $\quad \varphi(x,y) = (x,y,x+y)$

$$N_\varphi(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y} = (1\,0\,1) \times (0\,1\,1) = (-1,-1,1)$$

לפי סטוקס

$$\int_\Gamma F\,dr = \int_B \nabla\times F\,d\sigma = \int_B (-6yz, 0, -6xy)\,d\sigma =$$

$$\int_{x^2+y^2\le 1} (-6y(x+y), 0, -6xy)\,(-1,-1,1) = \int_{x^2+y^2\le 1} 6y^2\,dx\,dy$$

$$= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} 6r^2\sin^2\theta\, r\,dr\,d\theta = \frac{6}{4}\cdot\pi = \frac{3\pi}{2}.$$

.3 .א

$$J_\phi = \det\begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & 2z \\ -2x & 0 & 2z \end{bmatrix} = 16xyz$$

לכן $J_\phi(1,1,1) = 16$ אלא

$\boxed{\operatorname{vol}(\phi(C_\delta)) \simeq 16\,\delta^3}$

$\varphi: [1,1+\delta]^2 \to \phi(S_\delta)$ הפרמטריזציה הנמוכה δ.

.ב הנגזרת

$N_\varphi(1,1) = 4(1,1,1) \Leftarrow N_\varphi(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & -2x \\ -2y & 2y & 0 \end{pmatrix} = (4xy, 4xy, 4xy)$ אלא ✓.

$\varphi(x,y) = \phi(x,y,1) = (x^2-y^2,\ y^2+1,\ 1-x^2)$

$\boxed{\operatorname{area}(\phi(S_\delta)) \simeq |N_\varphi(1,1)|\cdot\delta^2 = 4\sqrt{3}\,\delta^2}$ לכן

4. א. $\operatorname{div} F = 0$

ב. הנפח S מכיל את $(0,0,0)$ בפנים ולכן

$$\int_S F \, d\sigma = 4\pi$$

ג. הנפח T אינו מכיל את $(0,0,0)$ בפנים ולכן

$$\int_T F \, d\sigma = 0$$

ד. אין H כך ש $F = \nabla \times H$.

אחרת $\nabla \times F = F$ (לפי)

$$\int_S F \, d\sigma = \int_S \nabla \times H \, d\sigma = \int_{\partial S} H \, dr = 0$$, סתירה.