בוחן באלגוריתמים קומבינטוריים 104291 – 14.12.11

משך הבוחן שעתיים. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל ארבע השאלות. **בהצלחה!**

1. יהא $0 < \alpha < 1$ ויהא $x = (x_1, \ldots, x_n)$ וקטור של מספרים ממשיים שונים. תהא π התמורה הממיינת את x, כלומר:

$$x_{\pi(1)} < \cdots < x_{\pi(n)} \quad .$$

א. (13 נקודות) תן אלגוריתם השוואות (יעיל ככל האפשר) המקבל כקלט את α ו־ x , ומחשב כפלט את $\pi(1), \ldots, \pi(\lfloor \alpha n \rfloor)$.
(כלומר אלגוריתם הממיין את $\lfloor \alpha n \rfloor$ האיברים הקטנים ביותר ב־ x).
נתח את סיבוכיות האלגוריתם כפונקציה של α ו־ n.

ב. (12 נקודות) תן חסם תחתון, כפונקציה של α ו־ n, למספר ההשוואות המירבי שיבצע <u>כל</u> אלגוריתם הפותר את הבעיה בסעיף א' .

2. א. (13 נקודות) תאר את האלגוריתם למציאת החציון של סדרת מספרים ממשיים ונתח את זמן הריצה שלו.

ב. (12 נקודות) נתונים n מספרים ממשיים שונים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ וכן n מספרים חיוביים $w_1, \ldots, w_n$ המקיימים $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.
תן אלגוריתם שסיבוכיותו $O(n)$ המוצא z ממשי המקיים

$$\sum_{\{i\,:\,x_i \geq z\}} w_i \geq \frac{1}{2} \quad \text{וגם} \quad \sum_{\{i\,:\,x_i \leq z\}} w_i \geq \frac{1}{2} \quad .$$

3. יהא $G=(V,E)$ גרף עם $|V|=n\geq 4$ קדקדים ועם משקלות אי־שליליים $w(e)$ על הצלעות $e\in E$.

א. (9 נקודות) נניח כי $e_1,\ldots,e_{n-1}$ הינו עץ פורש המקיים $w(e_1)\leq\cdots\leq w(e_{n-1})$, וכי $f_1,\ldots,f_{n-1}$ הינו עץ פורש המקיים $w(f_1)\leq\cdots\leq w(f_{n-1})$.
הוכח כי קיים עץ פורש שמשקלו לכל היותר

$$\sum_{i=1}^{n-1}\min\{w(e_i),w(f_i)\}$$

ב. (8 נקודות) נתון כי G מכיל שני עצים פורשים מינימליים $T_1=(V,E_1)$, $T_2=(V,E_2)$ הזרים בצלעות (כלומר $E_1\cap E_2=\emptyset$).
הוכח כי G בהכרח מכיל 6 צלעות שוות משקל.

ג. (8 נקודות) תן דוגמא של גרף ממושקל G על 6 קדקדים המכיל שני עצים פורשים מינימליים זרים בצלעות, אך אינו מכיל 7 צלעות שוות משקל.

4. יהיו $p_1,\ldots,p_7\geq 0$ כך ש־ $\sum_{i=1}^{7}p_i=1$. יהיו $\ell_1,\ldots,\ell_7$ אורכי המילים בצופן רישא אופטימלי המתאים לוקטור ההתפלגות $p=(p_1,\ldots,p_7)$.
יהא

$$f(p)=\sum_{i=1}^{7}p_i\ell_i$$

האורך הממוצע (הממושקל) של מילה בצופן אופטימלי זה.

א. (13 נקודות) חשב את $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{16})$.

ב. (12 נקודות) האם קיימת התפלגות $p=(p_1,\ldots,p_7)$ כך ש־

$$f(p)=\frac{41}{14}\quad ?$$

1. א. תארנו בכיתה אלגוריתם למיון n מספרים המבצע לכל היותר $c_1 n \log_2 n$ השוואות, ואלגוריתם למציאת האיבר ה-k הקטן ביותר בין n מספרים המבצע $\geq c_2 n$ השוואות.

אלגוריתם למיון $\lfloor \alpha n \rfloor$ האיברים הקטנים ביותר:

(i) מצא את x = האיבר ה-$\lfloor \alpha n \rfloor$ הקטן ביותר ע"י $\geq c_2 n$ השוואות.

(ii) מצא את B = קב' האיברים הקטנים מ-x ע"י $n-1$ השוואות.

(iii) מיין את B ע"י $c_2 \lfloor \alpha n \rfloor \log_2 \lfloor \alpha n \rfloor$ השוואות.

סה"כ מס' השוואות הינו לכל היותר:

$$c_2 n + n - 1 + c_2 \lfloor \alpha n \rfloor \log_2 \lfloor \alpha n \rfloor \leq c_3 \alpha n \log_2 n$$

ב. מספר הפלטים האפשריים של אלגוריתם המוצא את $\lfloor \alpha n \rfloor$ האיברים הקטנים ביותר הוא $n(n-1)\cdots(n-\lfloor \alpha n \rfloor+1)$. לכן על קלט מסוים האלגוריתם יבצע לפחות

$$\log_2 (n(n-1)\cdots(n-\lfloor \alpha n \rfloor+1)) = \sum_{j=n-\lfloor \alpha n \rfloor+1}^{n} \log_2 j \geq \int_{n-\lfloor \alpha n \rfloor+1}^{n} \log_2 x \, dx \geq c_4 \alpha n \log_2 n$$

השוואות.

2. ב. נפתור בע"ת כללית יותר: בהינתן $x = (x_1, \dots, x_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$ כך ש- $\sum w_i = 1$, $\forall i \; w_i \geq 0$, ו- $0 \leq \alpha \leq 1$

נחשב $A(n, x, w, \alpha) = z$ המוצאת z כך ש

$$\sum_{\{i : x_i \geq z\}} w_i \geq 1-\alpha \quad , \quad \sum_{\{i : x_i \leq z\}} w_i \geq \alpha .$$

תיאור רקורסיבי של $A(n,x,w,\alpha)$:

(i) חשב את u = חציון של x .

(ii) לכל $I_1=\{i: x_i\le u\}$, $I_2=\{i: x_i\ge u\}$

וחשב

$$S_1=\sum_{i\in I_1} w_i \ , \quad S_2=\sum_{i\in I_2} w_i \ .$$

(iii) אם $S_1\ge\alpha$, $S_2\ge 1-\alpha$ אז $u \leftarrow A(n,x,w,\alpha)$.

אם $S_1<\alpha$ לפיכך $x'=\{x_i : i\in I_2\}$

$$\alpha'=\frac{\alpha-S_1}{\sum_{j\in I_2} w_j} \ , \quad n'=|I_2| \ , \quad w'=\left\{\frac{w_i}{\sum_{j\in I_2} w_j} : i\in I_2\right\}$$

אז $A(n,x,w,\alpha)\leftarrow A(n',x',w',\alpha')$.

אם $S_2<1-\alpha$ לפיכך $x'=\{x_i : i\in I_1\}$

$$\alpha'=1-\frac{(1-\alpha)-S_2}{\sum_{j\in I_1} w_j} \ , \quad n'=|I_1| \ , \quad w'=\left\{\frac{w_i}{\sum_{j\in I_1} w_j} : i\in I_1\right\}$$

אז $A(n,x,w,\alpha)\leftarrow A(n',x',w',\alpha')$.

<u>סיבוכיות</u>: נסמן ב- $f(n,\alpha)$ את מס' הפעולות הנדרשות לחישוב $A(n,x,w,\alpha)$. אז

$$f(n,\alpha)\le O(n)+f\left(\tfrac{n}{2},\alpha'\right) .$$

לכן אם נסמן $g(n)=\max_{\alpha} f(n,\alpha)$ [קבוע]

$g(n)\le O(n)+g\left(\tfrac{n}{2}\right)$ לכן $g(n)=O(n)$.

3.א. פי לפרוולת כי אם $e_1,\dots,e_{n-1}$ על פורש מינימלי המתקבל ע"י אלגוריתם קרוסקל (וקפרט $w(e_1)\le\dots\le w(e_{n-1})$), ואם $f_1,\dots,f_{n-1}$ על פורש המק"מ ($w(f_1)\le\dots\le w(f_{n-1})$), אזי $w(e_k)\le w(f_k)$ לכל $1\le k\le n-1$.

נראה זאת באינדוקציה על k. נניח כי $w(e_i)\le w(f_i)$ לכל $i<k$.

נע"ן בי"ע $\{e_1,\dots,e_{k-1}\}$ וב- $\{f_1,\dots,f_k\}$. לפי למת החלוף ק"מ $k\le i\le 1$ כך ש- $\{e_1,\dots,e_{k-1},f_i\}$ הינו יער. הראנו בנ"ת כי $\{e_1,\dots,e_k\}$ הוא יער מינימלי עם k צלעות, לכן:

$$w(f_k)\ge w(f_i)\ge w(e_k) \Leftarrow \sum_{j=1}^{k-1} w(e_j)+w(f_i)\ge \sum_{j=1}^{k} w(e_j).$$

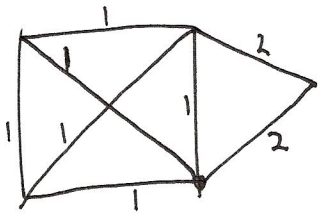
ב. יהיו $\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$, $\{f_1,\dots,f_{n-1}\}$ עפ"מ שונים המק"מ'ים

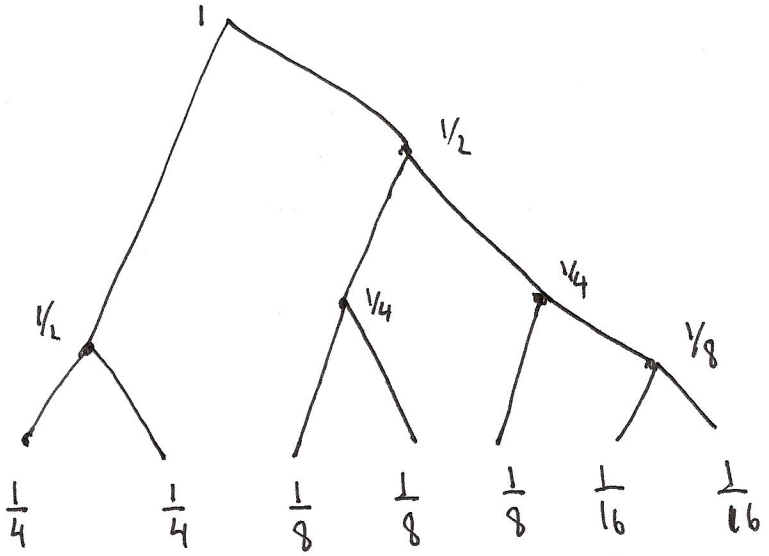
$w(e_1)\le\dots\le w(e_{n-1})$! $w(f_1)\le\dots\le w(f_{n-1})$. לפי א. $w(e_i)=w(f_i)$ $\forall i$.

עתה: $\{e_1,f_1\}$ יער לכן $w(e_1)+w(f_1)\ge w(e_1)+w(e_2) \Leftarrow w(f_1)=w(e_2)$

ולכן $w(e_1)=w(e_2)=w(f_1)=w(f_2)$. כמו כן לפחות אחת מהצלעות f_1,f_2 אינה סופרת מעגל עם $\{e_1,e_2\}$. נניח בהג"כ שגם f_1. אזי $\{e_1,e_2,f_1\}$ יער ולכן $w(e_1)+w(e_2)+w(f_1)\ge w(e_1)+w(e_2)+w(e_3)$ ולכן $w(e_1)=w(f_1)\ge w(e_3)$ ולכן $w(e_1)=w(e_2)=w(e_3)=w(f_1)=w(f_2)=w(f_3)$.

ג.





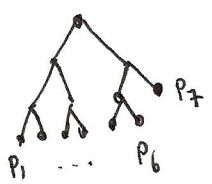
$$f\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{16},\tfrac{1}{16}\right) = 2\cdot\tfrac{1}{4}+2\cdot\tfrac{1}{4}+3\cdot\tfrac{1}{8}+3\cdot\tfrac{1}{8}+3\cdot\tfrac{1}{8}+4\cdot\tfrac{1}{16}+4\cdot\tfrac{1}{16} = \frac{21}{8}$$

ג. <u>טענה:</u> לכל קיימת התפלגות $p=(p_1,\dots,p_7)$ כך ש-

$$f(p) = \frac{41}{14}.$$

<u>הוכחה:</u> בהנחה $p_7 \le \frac{1}{7}$. קיים קוד בינארי

עם 7 מילים בעלות אורכים $l_1=\dots=l_6=3$, $l_7=2$



$$f(p_1,\dots,p_7) \le \sum_{i=1}^{7} p_i l_i = 3(p_1+\dots+p_6)+2p_7 = 3(1-p_7)+2p_7$$

$$= 3-p_7 \le \frac{20}{7} < \frac{41}{14}.$$