משך הבוחן שעתיים. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל ארבע השאלות. **בהצלחה!**

1. חשב את הסכומים הבאים:

א. (13 נקודות)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

ב. (12 נקודות)

$$\sum_{k=4}^{n} \binom{k}{4}\binom{n}{k}$$

2. א. (13 נקודות) מצא את מספר הזוגות הסדורים (A, B) של קבוצות A, B המוכלות ב־ $\{1, \ldots, n\}$ כך ש־ $|A \cap B| = 1$.

ב. (12 נקודות) מצא את מספר השלשות הסדורות (A, B, C) של קבוצות A, B, C המוכלות ב־ $\{1, \ldots, n\}$ כך ש־ $A \cup B \cup C = \{1, \ldots, n\}$.

3. נסמן ב־ $f(n)$ את מספר האופנים לשים n כדורים זהים בשלושה תאים שונים, כך שהתא הראשון יכיל מספר זוגי של כדורים.
(שים לב כי $f(0) = 1$).
נסמן ב־ $g(n)$ את מספר האופנים לשים n כדורים זהים בשלושה תאים שונים, כך שכל תא יכיל מספר שונה של כדורים.
(שים לב כי $g(0) = g(1) = g(2) = 0$).

א. (9 נקודות) חשב במפורש את $f(n)$.

ב. (8 נקודות) מצא ביטוי פשוט לפונקציה היוצרת $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$.

ג. (8 נקודות) חשב במפורש את $g(n)$.

4. נסמן ב־ a_n את מספר הסדרות באורך n המורכבות מהסימנים $0, 1, 2$ שאינן מכילות זוג אפסים או זוג אחדים עוקבים.
(שים לב כי $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 7$).

א. (13 נקודות) הוכח כי לכל $n \geq 2$ מתקיים $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$.

ב. (12 נקודות) מצא נוסחא מפורשת ל־ a_n.

פתרון	הערה

1. א.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} =$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

פתרון לסעיף f: נסמן $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^{k+1}$.

אז $f'(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{k} = (1+x)^{n}$ ולכן

$$f(x) = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} + C.$$

יחד $0 = f(0) = \frac{1}{n+1} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{n+1}$, ולכן

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = f(1) = \frac{(1+1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

ג.

$$\sum_{k=4}^{n}\binom{k}{4}\binom{n}{k} = \left|\{(A,B) : A \subset B \subset [n],\ |A| = 4\}\right|$$

$$= \binom{n}{4}\cdot 2^{n-4}$$

2.א. נשים לב כי ההתאמה

$$\phi : \{(A,B) : A,B \subset [m],\ A \cap B = \phi\} \to \{0,1,2\}^m$$

הנתונה ע"י $\phi(A,B) = (v_1, \dots, v_m)$ כאשר

$$v_i = \begin{cases} 0 & i \in A \\ 1 & i \in B \\ 2 & i \notin A \cup B \end{cases}$$

$$\left|\{(A,B) : A,B \subset [m],\ A \cap B = \phi\}\right| = 3^m .$$

ב.ג. תחת זר, לכן

$$\left|\{(A,B) : A,B \subset [n],\ |A \cap B| = 1\}\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\{(A,B) : A,B \subset [n],\ A \cap B = \{i\}\}\right|$$

לכן

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|\{(A',B') : A',B' \subset [n] - \{i\},\ A' \cap B' = \phi\}\right| = n \cdot 3^{n-1}$$

ג. לכל שלשה (A_1, A_2, A_3) של קבוצות $A_1, A_2, A_3 \subset [n]$ נתאים מטריצה של אפסים ואחדים $B = (b_{ij})$ מסדר $3 \times n$ ע"י

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & j \in A_i \\ 0 & j \notin A_i \end{cases} .$$

נרצה ש- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [n]$ אם ורק כי העמודה של B שונה מ- $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

מס' העמודות השונות מ- $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ של אפסים ואחדים הוא כמספר $2^3 - 1 = 7$

לכן

$$\left|\{(A_1, A_2, A_3) : A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [n]\}\right| = 7^n$$

הוכחה אחרת בעזרת הכלה והפחתה: לכל i נגדיר

$$\mathcal{B}_i = \{(A_1, A_2, A_3) : \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 \not\ni i\}$$ אז

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |\mathcal{B}_{i_1} \cap \dots \cap \mathcal{B}_{i_k}| =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{k} 8^{n-k}.$$

לכן

$$\left|\{(A_1, A_2, A_3) : \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [n]\}\right| = 8^n - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 8^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 8^{n-k} = (8-1)^n = 7^n$$

3. א. אם שמים בתא הראשון $2k$ כדורים, אז מספר האפשרויות לשים את שאר $n-2k$ הכדורים בתאים השני והשלישי הוא $n-2k+1$. לכן

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-2k+1) = (n+1)\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)$$

$$= \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right) = \left\lfloor \frac{(n+2)^2}{4} \right\rfloor$$

ב.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} x^j \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1+x} \frac{1}{(1-x)^3}$$

$A = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1 + a_2 + a_3 = n, \ a_i \geq 0\}$

ב. [NO]

לכל $1 \leq i \leq 3$

$B_i = \{(a_1, a_2, a_3) \in A : a_j = a_l \quad \{j, l, i\} = [3]\}$.

מכיוון ש לכל $1 \leq i \leq 3$ $|B_i| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

(לדוגמא:

$|B_1| = |\{(a_1, a_2, a_3) \in A : a_2 = a_3\}| =$

$|\{(k, l, l) : k + 2l = n\}| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$)

לכל $i \neq j$:

$|B_i \cap B_j| = |B_1 \cap B_2 \cap B_3| = \begin{cases} 1 & 3 \mid n \\ 0 & 3 \nmid n \end{cases}$.

לכן $\left|\bigcup_{i=1}^{3} B_i\right| = |B_1| + |B_2| + |B_3| - |B_1 \cap B_2| - |B_1 \cap B_3| - |B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3|$

$$= \begin{cases} 3\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1\right) - 2 & 3 \mid n \\ 3\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1\right) & 3 \nmid n \end{cases}$$

לכן

$g(n) = |A| - |B| =$

$$\begin{cases} \binom{n+2}{2} - 3\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 & 3 \mid n \\ \binom{n+2}{2} - 3\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3 & 3 \nmid n \end{cases}$$

4. ט. נסמן ב- A_n את אוסף הסדרות ב- $\{0,1,2\}^n$ שאינן מכילות

צמד אפסים או אחדים עוקבים, $a_n = |A_n|$.

לכל סדרה $x=(x',i)\in A_{n-1}$ נתאים צמד סדרות ב- A_n

כך:

$$(x',2)\to(x',2,0),\ (x',2)\to(x',2,1)\qquad (x',1)\to(x',1,0),\ (x',1)\to(x',1,2)\qquad (x',0)\to(x',0,1),\ (x',0)\to(x',0,2).$$

באופן זה נקבל בדיוק פעם אחת את כל הסדרות ב- A_n, למעט

אלה המסתיימות ב- 22. מספרן של אלה בדיוק a_{n-2}

לכן $a_n = 2a_{n-1}+a_{n-2}$.

ג. לפי סעיף א. $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ כאשר

$\alpha = 1+\sqrt{2}$, $\beta = 1-\sqrt{2}$ הוא שורש המשוואה $y^2-2y-1=0$.

למציאת A,B נציב $n=0,1$ ונקבל

$$(*)\quad \begin{cases} 1 = a_0 = A+B \\ 3 = a_1 = A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) \end{cases}$$

פתרון המערכת $(*)$ נותן $B=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, $A=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

ולכן

$$a_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right]$$