בוחן בקומבינטוריקה 104286 – 9.12.14

משך הבוחן שעתיים. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל ארבע השאלות. **בהצלחה!**

1. שני סעיפי השאלה אינם קשורים זה לזה.

א. (12 נקודות) מצא את מספר הזוגות הסדורים (A, B) של קבוצות $A, B \subset \{1, \ldots, n\}$ כך שגודל חיתוכן $|A \cap B|$ הוא זוגי.
<u>הערה:</u> כתוב את התשובה כביטוי פשוט שאינו כולל סכום (Σ).

ב. (13 נקודות) הוכח (בדרך קומבינטורית או אחרת):

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}.$$

2. נסמן ב־ a_n את מספר האופנים לחלק n עוגיות (זהות) ל־ 100 תלמידים (שונים) כך שכל תלמיד יקבל לכל היותר 10 עוגיות.
שים לב כי $a_n = 0$ עבור $n \geq 1001$.

א. (12 נקודות) מצא ביטוי פשוט לפונקציה היוצרת $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

ב. (13 נקודות) מצא ביטוי מפורש ל־ a_n.

3. n ילדי גן ששיחקו במים תולים את גרביהם הרטובים ליבוש. בסוף היום הגננת מחלקת את $2n$ הגרביים חזרה לילדים.

א. (5 נקודות) נסמן ב־ a_n את מספר האופנים לחלק את $2n$ הגרביים לילדים כך שכל ילד יקבל שני גרביים.
(שים לב: ילד יכול לקבל שני גרביים ששניהם שייכים לילד מסויים או שני גרביים שאחד שייך לילד אחד והשני לילד אחר).
למשל, $a_1 = 1$ ו־ $a_2 = 6$.
מצא ביטוי מפורש ל־ a_n.

ב. (5 נקודות) כתוב את נוסחת ההכלה וההדחה.

ג. (15 נקודות) נסמן ב־ b_n את מספר האופנים לחלק את $2n$ הגרביים לילדים כך שכל ילד יקבל שני גרביים (כמו בסעיף א') שמתוכם <u>לפחות</u> אחד <u>אינו</u> שלו.
למשל, $b_1 = 0$ ו־ $b_2 = 5$.
מצא ביטוי מפורש ל־ b_n.

4. נסמן ב־ u_n את מספר הסדרות באורך n המורכבות מהאותיות A, B, C, שבהן האות C אינה מופיעה פעמיים (או יותר) ברצף.
למשל, $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 8$, $u_3 = 22$.

א. (12 נקודות) מצא נוסחת נסיגה ל־ u_n.

ב. (13 נקודות) מצא נוסחא מפורשת ל־ u_n.

1. ב.

$$\left|\{(A,B) : 2 \mid |A\cap B|,\ A,B\subset[n]\}\right| = \sum_{i\geq 0}\left|\{(A,B) : |A\cap B| = 2i,\ A,B\subset[n]\}\right| =$$

$$= \sum_{i\geq 0}\binom{n}{2i}3^{n-2i} = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\frac{1+(-1)^k}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}(-1)^k$$

$$= \frac{1}{2}\left(4^n+2^n\right)$$

ג. נגדיר A_0, B_0 קבוצות בגודל $|A_0| = |B_0| = n$. לכל k:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \left|\{(a, A, B) : a\in A\subset A_0,\ B\subset B_0,\ |A|+|B| = n\}\right|$$

$$= \sum_{a\in A}\left|\{C : a\in C\subset A_0\cup B_0\}\right| = n\cdot\binom{2n-1}{n-1}$$

2. א.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{i=0}^{10} x^i\right)^{100} = \left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^{100}$$

ב.

$$\left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^{100} = (1-x^{11})^{100}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+99}{99}x^l =$$

$$= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}(-1)^k x^{11k}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+99}{99}x^l$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{100}{k}\binom{n-11k+99}{99}\right]x^n$$

לכן

$$a_n = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{100}{k}\binom{n-11k+99}{99}$$

הערה: אפשר לפתור את סעיף ב' גם ע"י נוסחת ההכלה וההדחה.

3. אז. $a_n = \binom{2n}{2,\dots,2} = \frac{(2n)!}{2^n}$

ב. תהא A_i קבוצת התמורות בהן i מקבל את שתי הערכים שלו

אזי לכל $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = a_{n-k} = \frac{(2(n-k))!}{2^{n-k}}$$

לכן לפי נוסחת ההכלה וההדחה:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(2(n-k))!}{2^{n-k}},$$

לכן

$$b_n = a_n - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2(n-k))!}{2^{n-k}}$$

4. אז. נסמן ב- u_n את מס' הסדרות הרקיקות באורך n המסתיימות ב- A או B.

" ב- v_n " " " " ב- C.

אזי $a_n = u_n + v_n$, $u_n = 2a_{n-1}$, $v_n = u_{n-1}$, לכן:

$$a_n = u_n + v_n = 2a_{n-1} + u_{n-1} = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

ב. השורשים של $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$ הם $1 \pm \sqrt{3}$, לכן

ק"מ ל A, B כך שלכל $n \ge 0$

$$a_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$$

$$\begin{cases} 1 = a_0 = A + B \\ 3 = a_1 = A(1+\sqrt{3}) + B(1-\sqrt{3}) \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ B = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$ ולכן

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1+\sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1-\sqrt{3})^n.$$