

מבחן בקומבינטוריקה - 21.4.24

משך המבחן 3 שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמקו תשובותיכם בקצור ובבהירות. ענו על כל חמש השאלות. **בהצלחה!**

סימונים: $[n] = \{1, \dots, n\}$. S_n = משפחת כל התמורות על $[n]$. $\mathbb{Z}$ = קבוצת המספרים השלמים.

1. למספר שלם $n \geq 0$, נסמן ב- a_n את מספר הסדרות $(z_1, \dots, z_n)$ כך ש- $z_i \in [4]$ לכל $1 \leq i \leq n$, וכך שהרצף 11 אינו מופיע בסדרה. כלומר $(z_i, z_{i+1}) \neq (1, 1)$ לכל $1 \leq i \leq n-1$. שימו לב כי $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 15$.

א. (8 נקודות) מצאו נוסחת נסיגה לינארית ל- a_n . כלומר: מצאו $k \geq 1$ ו- $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ כך ש- $a_n = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{n-i}$ לכל $n \geq k$. נמקו תשובתכם.

ב. (6 נקודות) מצאו ביטוי מפורש ל- a_n .

ג. (6 נקודות) מצאו ביטוי פשוט (שאינו מכיל את סימן הסכום) לפונקציה היוצרת $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

2. א. (8 נקודות) מצאו את העץ על קבוצת הקדקדים [10] שסדרת PRUFER שלו היא $(2, 2, 1, 3, 3, 1, 4, 4)$.

ב. (12 נקודות) נסמן ב- u_n את מספר העצים על קבוצת הקדקדים $[n]$ שבהם לקדקד המסומן ב-1 יש ערכיות זוגית. שימו לב כי $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$, $u_4 = 6$. מצאו ביטוי פשוט (שאינו מכיל את סימן הסכום) ל- u_n .

3. א. (12 נקודות) תהא $A \subset \mathbb{Z}^n$ קבוצה שגודלה $|A| = 10^n + 1$. הוכיחו שקיימים וקטורים שונים $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ ו- $b = (b_1, \dots, b_n) \in A$ כך ש- $3a_i + 7b_i \equiv 10 \pmod{10}$ לכל $1 \leq i \leq n$.
 ב. (8 נקודות) מצאו קבוצה $B \subset \mathbb{Z}^n$ שגודלה $|B| = 10^n$ כך שלכל שני וקטורים שונים $a = (a_1, \dots, a_n) \in B$ ו- $b = (b_1, \dots, b_n) \in B$ קיים $1 \leq i \leq n$ כך ש- $3a_i + 7b_i \not\equiv 10 \pmod{10}$. נמקו תשובתכם.

4. יהיו i, j מספרים שונים ב- $[n]$. נאמר שהזוג $\{i, j\}$ הוא 2-מעגל בתמורה $\pi \in S_n$ אם $\pi(i) = j$ וגם $\pi(j) = i$. נסמן ב- A_{ij} את כל התמורות $\pi \in S_n$ כך ש- $\{i, j\}$ הוא 2-מעגל ב- π . נסמן ב- g_n את מספר התמורות ב- S_n שאינן מכילות 2-מעגלים. שימו לב כי $g_3 = 3, g_1 = g_2 = 1$.

א. (8 נקודות) יהיו $\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_k, j_k\} \subset [n]$ אוסף של k זוגות זרים, כלומר $|\{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k\}| = 2k$. חשבו את

$$|A_{i_1 j_1} \cap A_{i_2 j_2} \cap \dots \cap A_{i_k j_k}|$$

ב. (12 נקודות) מצאו ביטוי מפורש (שיכול לכלול את סימן הסכום) ל- g_n .

5. א. (8 נקודות) נסחו והוכיחו את נוסחת אוילר על הקשר בין מספר הקדקדים, מספר הצלעות, ומספר הפיאות של גרף מישורי.

ב. (12 נקודות) יהא P פיאון ב- $\mathbb{R}^3$ המקיים את שלושת התנאים הבאים:

- P כולל פיאות משולשות ומחומשות בלבד.
 - כל צלע ב- P נמצאת גם על פיאה מחומשת וגם על פיאה משולשת.
 - כל קדקד ב- P נמצא על ארבע צלעות בדיוק.
- מצאו את מספר הקדקדים, מספר הצלעות, מספר הפיאות המשולשות ומספר הפיאות המחומשות ב- P .

