

1. a_n - ארבעה מספרים (כחומר למחשבה) (11)

המספרים a_n הם מספרים שלמים, b_n הם מספרים שלמים

המספרים a_n הם מספרים שלמים, b_n הם מספרים שלמים

המספרים a_n הם מספרים שלמים, b_n הם מספרים שלמים

$$n \geq 1 \quad \text{כאשר} \quad \begin{cases} a_n = c_n + 3b_n \\ c_n = 3b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} \end{cases}$$

כאשר

$$a_n = c_n + 3b_n = 3(b_n + b_{n-1}) = 3(a_{n-1} + a_{n-2})$$

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{21}}{2} \quad \text{כאשר} \quad y^2 - 3y - 3 = 0$$

$$A, B \text{ מספרים שלמים} \quad a_n = A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a_0 = A \cdot \lambda_1^0 + B \cdot \lambda_2^0 = A + B \\ 4 = a_1 = A \cdot \lambda_1^1 + B \cdot \lambda_2^1 = A \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2} \right) + B \left(\frac{3-\sqrt{21}}{2} \right) \end{cases}$$

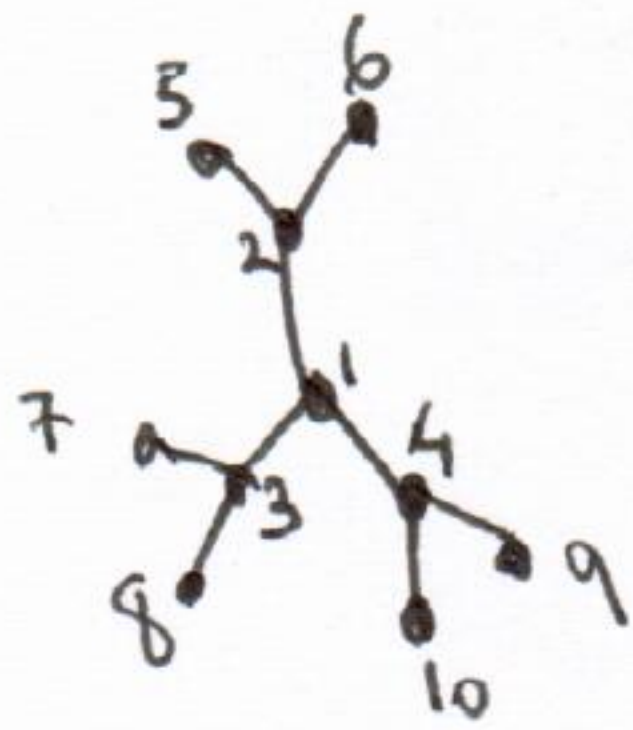
$$\text{לכן} \quad (A, B) = \frac{1}{2\sqrt{21}} (5 + \sqrt{21}, \sqrt{21} - 5)$$

$$a_n = \frac{5 + \sqrt{21}}{2\sqrt{21}} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{21} - 5}{2\sqrt{21}} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{21}}{2} \right)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 + 4x + 3 \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n$$

$$= 1 + 4x + 3x(f(x) - 1) + 3x^2 f(x) = (3x + 3x^2) f(x) + 1 + x$$

$$f(x) = \frac{1+x}{1-3x-3x^2}$$



K.2

$$D_n = \{(d_1, \dots, d_n) : \sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1), \text{ p.e. } d_i \geq 1\} \quad \text{nos. } 2$$

$$A_n = \{(d_1, \dots, d_n) : \sum_{i=1}^n d_i = n-2, \text{ p.e. } d_i \geq 0\}$$

$$(d_1, \dots, d_n) \in D_n \quad \text{nos. } 130 \quad \text{p.e. } T \quad \text{nos. } 130N$$

$$\text{p.e. } \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1} \quad \text{nos. } 130$$

$$u_n = \sum_{\substack{(d_1, \dots, d_n) \in D_n \\ d_1 \geq 1}} \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1} = \sum_{(d_1, \dots, d_n) \in D_n} \frac{1+(-1)^{d_1}}{2} \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{(d_1, \dots, d_n) \in D_n} \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1} + \frac{1}{2} \sum_{(d_1, \dots, d_n) \in D_n} (-1)^{d_1} \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{(d_1, \dots, d_n) \in A_n} \binom{n-2}{d_1, \dots, d_n} - \frac{1}{2} \sum_{(d_1, \dots, d_n) \in A_n} (-1)^{d_1} \binom{n-2}{d_1, \dots, d_n}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{(1+\dots+1)}_n^{n-2} - \frac{1}{2} \underbrace{(-1+1+\dots+1)}_n^{n-2} = \frac{1}{2} n^{n-2} - \frac{1}{2} (n-2)^{n-2}$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{Z}_{10}^n \quad \text{7/32/1} \quad .k \quad .3$$

$$f(a_1, \dots, a_n) = (a_1 \pmod{10}, \dots, a_n \pmod{10})$$

$$\text{7/32/1} \quad \text{7/32/1} \quad f \quad \Leftarrow \quad |A| = 10^n + 1 > 10^n = |\mathbb{Z}_{10}^n|$$

$$-e \quad p \quad a = (a_1, \dots, a_n) \neq b = (b_1, \dots, b_n) \in A \quad \text{7/32/1} \quad \text{7/32/1}$$

$$1 \leq i \leq n \quad \text{7/32/1} \quad a_i \pmod{10} = b_i \pmod{10} \quad \text{7/32/1} \quad , \quad f(a) = f(b)$$

$$10 \rightarrow \text{7/32/1} \quad 3a_i + 7b_i = 3(a_i - b_i) + 10b_i \quad \text{7/32/1}$$

$$. \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{7/32/1}$$

$$a = (a_1, \dots, a_n) \neq b = (b_1, \dots, b_n) \in B \quad \text{7/32/1} \quad . \quad B = \{0, \dots, 9\}^n \quad \text{7/32/1} \quad . \quad 2$$

$$0 \leq a_i, b_i \leq 9 \quad \text{7/32/1} \quad a_i \neq b_i \quad -e \quad p \quad i \quad \text{7/32/1}$$

$$p \quad \text{7/32/1} \quad 10 \nmid a_i - b_i \quad \text{7/32/1}$$

$$. \quad 10 \rightarrow \text{7/32/1} \quad \text{7/32/1} \quad 3a_i + 7b_i = 3(a_i - b_i) + 10b_i$$

.4

.k

$(k)!$

2.

Φ

128

1

1

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{n!}{k! \cdot k!}$$

$$\frac{1}{2^k \cdot k!}$$

מספר הקצוות $\alpha = 2.5$ מספר הקצוות β

$|E| = 5\beta$ כאן $|E| = 3\alpha$ נניח $\alpha = 3$

$4|V| = \sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$ נניח $\alpha = 3$

$|V| = \frac{|E|}{2}$, $\beta = \frac{|E|}{5}$, $\alpha = \frac{|E|}{3}$ כאן

נניח $\alpha = 3$

$$2 = |V| - |E| + |F| = \frac{|E|}{2} - |E| + (\alpha + \beta) = \frac{|E|}{2} - |E| + \left(\frac{|E|}{3} + \frac{|E|}{5}\right) = \frac{|E|}{30}$$

$|V| = \frac{|E|}{2} = 30$, $|E| = 60$ כאן

$|F| = \alpha + \beta = 32$

$\beta = \frac{|E|}{5} = 12$, $\alpha = \frac{|E|}{3} = 20$