

מבחן בקומבינטוריקה - 28.5.24

משך המבחן 3 שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמקו תשובותיכם בקצור ובבהירות. ענו על כל חמש השאלות. **בהצלחה!**

סימונים: $[n] = \{1, \dots, n\}$. לגרף דו-צדדי $G = (V, E)$ עם צדדים A, B ולתת קבוצה $I \subset A$, נסמן ב- $\Gamma_G(I)$ את קבוצת כל הקדקדים $b \in B$ עבורם קיים $a \in I$ כך ש- $\{a, b\} \in E$.

1. ברשותנו מאגר לא מוגבל של מוטות משלשה סוגים: סוג A שאורכו 1, סוג B שאורכו 2, וסוג C שאורכו 2. נסמן ב- u_n את מספר האופנים להרכיב תורן באורך n ממוטות אלה.
דוגמא: $u_4 = 11$ כי התרנים האפשריים באורך 4 הם:
 $AAAA, AAB, AAC, ABA, ACA, BAA, CAA, BB, CC, \overline{BC}, \overline{CB}$

נסמן ב- v_n את מספר האופנים להרכיב תורן באורך n ממוטות אלה כך שמוט מסוג B אינו מופיע מיד אחרי מוט מסוג C .
דוגמא: $v_4 = 10$ כי התרנים האפשריים באורך 4 הם:
 $AAAA, AAB, AAC, ABA, ACA, BAA, CAA, BB, CC, BC$

א. (5 נקודות) מצאו נוסחת נסיגה לינארית ל- u_n . כלומר: מצאו $k \geq 1$ ו- $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ כך ש- $u_n = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_{n-i}$ לכל $n \geq k$. נמקו תשובתכם.

ב. (5 נקודות) מצאו ביטוי מפורש ל- u_n .

ג. (5 נקודות) מצאו ביטוי פשוט (שאינו מכיל את סימן הסכום) לפונקציה היוצרת $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

ד. (5 נקודות) מצאו נוסחת נסיגה לינארית ל- v_n .

2. יהא $G = (V, E)$ גרף דו-צדדי עם צדדים A, B .

א. (8 נקודות) יהא $d \geq 0$ מספר שלם. הוכיחו כי אם $|\Gamma_G(I)| \geq |I| - d$ לכל $I \subset A$, אזי G מכיל זיווג בגודל $|A| - d$.
הערה: אפשר להשתמש במשפט HALL (ואין צורך להוכיחו).

ב. (12 נקודות) נניח $|A| = |B| = n$ וכי $\deg_G(v) \geq \frac{n}{3}$ לכל $v \in V = A \cup B$. הוכיחו כי G מכיל זיווג עם לפחות $\frac{2n}{3}$ צלעות.

3. א. (8 נקודות) הגדירו את מספרי רמזי $R(k, \ell)$ והוכיחו כי

$$R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(k, \ell-1).$$

ב. (12 נקודות) הוכיחו כי לכל k קיים מספר טבעי $N = g(k)$ כך שלכל חלוקה של $[N]$ לשתי קבוצות זרות $[N] = A_1 \cup A_2$, קיימים $i \in \{1, 2\}$ ו- $x_1, \dots, x_k \in A_i$ (לא בהכרח שונים זה מזה) כך שגם $x_1 + \dots + x_k \in A_i$.

4. למספרים טבעיים $n, m \geq 1$ נסמן ב- $F(n, m)$ את מספר הפונקציות $f : [n] \rightarrow [m]$ כך שלכל $1 \leq i \leq m$ מתקיים $|f^{-1}(i)| \neq 1$ (במילים אחרות: אין איבר $i \in [m]$ המתקבל כתמונה של בדיוק איבר אחד ב- $[n]$).

א. (8 נקודות) הוכיחו כי $F(n, m) \geq m^n - mn(m-1)^{n-1}$.

ב. (12 נקודות) מצאו נוסחא מפורשת ל- $F(n, m)$.
הערה: הנוסחא יכולה לכלול סימן סכום אחד.

5. שני הסעיפים הבאים אינם תלויים זה בזה.

א. (10 נקודות) יהיו $n \geq r \geq 0$ מספרים טבעיים. חשבו את הסכום:

$$\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} \binom{n}{k}.$$

ב. (10 נקודות) האם קיים פיאות ב- $\mathbb{R}^3$ שכל פיאותיו הן מצולעים עם לפחות 6 צלעות? נמקו.