1. א. מספר התורים החוקיים המסתיימים ב-A הוא u_{n-1}

" " B- " " u_{n-2}

" " C- " " u_{n-2}

לכן $(*)\quad u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$

ב. הפולינום המתאים לנוסחת הנסיגה $(*)$ הוא

y^2-y-2 ששורשיו הם $\frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = 2,-1$

לכן $u_n = \alpha\cdot 2^n + \beta(-1)^n$. לכן

$$\begin{cases} \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 1 = u_0 = 1 \\ \alpha\cdot 2 - \beta = u_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow (\alpha,\beta) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

$$u_n = \frac{2}{3}\cdot 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$$

ג.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(u_{n-1}+2u_{n-2})x^n$$

$$= 1 + x + x\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-1}x^{n-1} + 2x^2\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-2}x^{n-2} = 1 + x + x(f(x)-1) + 2x^2 f(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

3. נסמן ב-α_n את מס' התורים החוקיים המסתיימים ב-A, ב-β_n את אלה המסתיימים ב-B ובְ-γ_n את אלה המסתיימים ב-C.

אזי

$$\Leftarrow \begin{cases} \alpha_n = v_{n-1} \\ \beta_n = \alpha_{n-2} + \beta_{n-2} \\ \gamma_n = v_{n-2} \end{cases}$$

$$(I) \quad v_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = v_{n-1} + (\alpha_{n-2} + \beta_{n-2}) + v_{n-2}$$

$$= v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-3} + \beta_{n-2}$$

מכאן

$$(II) \quad v_{n-2} = \alpha_{n-2} + \beta_{n-2} + \gamma_{n-2} = v_{n-3} + \beta_{n-2} + v_{n-4}$$

נחסיר את (II) מ- (I) ונקבל

$$v_n - v_{n-2} = (v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-3}) - (v_{n-3} + v_{n-4})$$

ולכן $v_n = v_{n-1} + 2v_{n-2} - v_{n-4}$ עבור $n \geq 4$.

2. ג. <u>טענה:</u> $|\Gamma_G(I)| \geq |I| - \frac{n}{3}$ לכל $\emptyset \neq I \subset A$.

<u>הוכחה:</u> אם $|I| \leq \frac{2n}{3}$, נבחר $x \in I$. לפי הנתון $\deg_G(x) \geq \frac{n}{3}$ ולכן

$$|\Gamma_G(I)| \geq \deg_G(x) \geq \frac{n}{3} \geq |I| - \frac{n}{3}.$$

אם $|I| > \frac{2n}{3}$, אזי מהנתון ו- $|\Gamma_G(y)| \geq \frac{n}{3}$ לכל $y \in B$

נובע כי $\Gamma_G(y) \cap I \neq \emptyset$. לכן $|\Gamma_G(I)| = n$. ∎

מהטענה ומשפט k נובע כי G מכיל זיווג

בגודל $\geq n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$

3. ב. נגדיר $g(k) = R(k+1,k+1)-1$, ויהא $N \ge g(k)$. תהא $[N] = A_1 \cup A_2$

חלוקה ונגדיר 2-צביעה של צלעות K_{N+1} ע"י

$$\phi(\{x,y\}) = \begin{cases} 1 & |y-x| \in A_1 \\ 2 & |y-x| \in A_2 \end{cases}$$

עפ"י הגדרת מספר רמזי ומאחר ו- $N+1 \ge R(k+1,k+1)-1$

נקבל כי K_{N+1} מכיל שלם חד צבעי על $k+1$ קדקדים.

כלומר $\overbrace{\text{וקיימים}}^{\text{קיים } i}$ $1 \le z_1 < \dots < z_{k+1} \le N+1$ כך שלכל $1 \le \alpha < \beta \le k+1$

$z_\beta - z_\alpha \in A_i$. בפרט, נסמן $y_\ell = z_{\ell+1} - z_\ell$

ל- $1 \le \ell \le k$, אזי $y_1,\dots,y_k \in A_i$ וגם $y_1+\dots+y_k = z_{k+1}-z_1 \in A_i$.

4. א. נסמן ב- $G(n,m) = m^n - F(n,m) =$ מספר ההתאמות

$f:[n]\to[m]$ עבורן קיים $1 \le i \le m$ כך ש- $|f^{-1}(i)|=1$.

נסמן ל- $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ ב- B_{ji} את כל ההתאמות

$f:[n]\to[m]$ כך ש- $f^{-1}(i)=\{j\}$. אזי $B_{ji} = (m-1)^{n-1}$

לכן

$$m^n - F(n,m) = G(n,m) \le \left|\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} B_{ji}\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |B_{ji}| = m \cdot n\,(m-1)^{n-1}$$

ולכן

$$F(n,m) \ge m^n - m\cdot n\,(m-1)^{n-1}$$

4. ב. ל- $1\le i\le m$ נסמן $A_i=\{f:[n]\to[m]:\ |f^{-1}(i)|=1\}$

אזי ל $1\le i_1<\dots<i_k\le m$:

$$|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}|=\binom{n}{k}\cdot k!\cdot(m-k)^{n-k}.$$

לכן

$$m^n-F(n,m)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m}|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}|$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!\,(m-k)^{n-k}$$

ולכן

$$F(n,m)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{m}{k}\binom{n}{k}\cdot k!\,(m-k)^{n-k}.$$

5. א.

$$\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}\binom{n}{k}=|\{(A,B):\ |A|=r,\ A\subset B\subset[n]\}|$$

$$=\binom{n}{r}\cdot 2^{n-r}$$

ב. אין פאון שכל פאותיו מצולעים עם ≥ 6 צלעות.

<u>הוכחה:</u> נסמן כרגיל ב- v,e,f את מס' הקדקודים, צלעות ופאות של הפאון, וב- f_i את מס' הפאות עם i צלעות.

נניח בשלילה ש- $f_i=0$ ל- $i\le 5$. אזי

$$2e=\sum_{i=3}^{\infty}i f_i=\sum_{i\ge 6}i f_i\ge 6\sum_i f_i=6f \quad\Leftarrow\quad f\le\frac{e}{3}$$

לכן $2=v-e+f\le v-e+\frac{e}{3}=v-\frac{2e}{3}$. לכן

$$3v\le\sum_x \deg(x)=2e\le 3v-6$$ סתירה