

מבחן באלגוריתמים קומבינטוריים - 1.9.2024

משך המבחן 3 שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמקו תשובותיכם בקצור ובבהירות. ענו על כל חמש השאלות. **בהצלחה!**

1. יהא $n = \sum_{i=1}^k i = \binom{k+1}{2}$ ותהא $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ קבוצה של n מספרים שונים.

א. (10 נקודות) תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המוצא חלוקה של A ל- k קבוצות זרות $A_1, \dots, A_k$ כך ש- $|A_i| = i$ לכל $1 \leq i \leq k$, וכך שלכל $1 \leq i < j \leq k$ ולכל $x \in A_i, y \in A_j$ מתקיים $x < y$. חשבו את סוכיות האלגוריתם כפונקציה של k .

ב. (10 נקודות) האם קיים אלגוריתם הפותר את הבעיה בסעיף א' ע"י פחות מ- $\frac{k^2 \cdot \log_2 k}{3}$ השוואות לכל קלט A בגודל $|A| = n = \binom{k+1}{2}$?

2. יהיו $0 \leq p_1, \dots, p_n$ כך ש- $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. יהיו $\ell_1, \dots, \ell_n$ אורכי המילים בצופן רישא אופטימלי לוקטור ההסתברות $p = (p_1, \dots, p_n)$. נסמן ב- $f(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i \ell_i$ את האורך הממוצע של מילה בצופן אופטימלי זה.

א. (10 נקודות) יהא $n = 2^k + 2^{k+1}$ ונגדיר עבור $1 \leq i \leq 2^k$ $p_i = 2^{-(k+1)}$ ו- $p_i = 2^{-(k+2)}$ עבור $2^k + 1 \leq i \leq 2^k + 2^{k+1}$. חשבו את $f(p_1, \dots, p_n)$.

ב. (10 נקודות) הוכיחו כי לכל $n \geq 2$ ולכל וקטור ההסתברות מתקיים $p = (p_1, \dots, p_n)$

$$f(p_1, \dots, p_n) \leq f\left(\frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{p_1 + p_2}{2}, p_3, \dots, p_n\right).$$

3. נגדיר העתקה $E : \mathbb{Z}_{408}^* \rightarrow \mathbb{Z}_{408}^*$ ע"י $E(x) = x^{43} \pmod{408}$.

א. (8 נקודות) הראו כי E חח"ע ומצאו את ההעתקה ההפוכה שלה $D = E^{-1}$, כלומר העתקה $D : \mathbb{Z}_{408}^* \rightarrow \mathbb{Z}_{408}^*$ המקיימת $E(D(x)) = x$ לכל $x \in \mathbb{Z}_{408}^*$.

ב. (6 נקודות) מצאו $a \in \mathbb{Z}_{408}^*$ המקיים $E(a) = 7 \pmod{408}$.

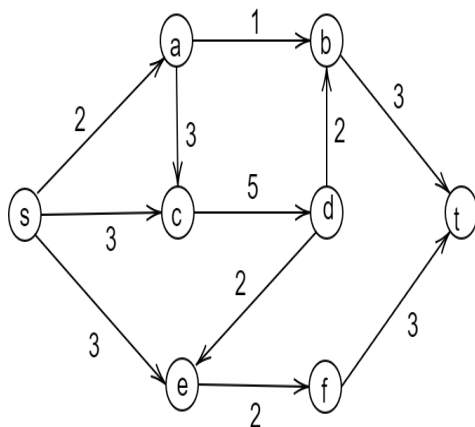
ג. (6 נקודות) האם קיים $b \in \mathbb{Z}_{408}^*$ המקיים $E(b)^2 = 7^2 \pmod{408}$? נמקו. אם תשובתכם חיובית, מצאו b כזה.

4. יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון קשיר ותהא $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית משקל על הצלעות. שני הסעיפים בשאלה אינם תלויים זה בזה.

א. (10 נקודות) נתון כי $|V| = 9$ וכי משקל העץ הפורש המינימלי ב- G הוא 13. קבעו האם יתכן ש- G מכיל שני עצים פורשים T_1, T_2 כך ש:
 (i) סדרת המשקלות של צלעות T_1 הינה $(1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3)$.
 (ii) סדרת המשקלות של צלעות T_2 הינה $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.
 נמקו תשובתכם.

ב. (10 נקודות) נתון כי כל מעגל ב- G מכיל צלע יחידה בעלת משקל מקסימלי. האם בהכרח G מכיל עץ פורש מינימלי יחיד? נמקו.

5. א. (8 נקודות) נתונה רשת הזרימה הבאה עם מקור s ובור t . מצאו זרימה מקסימלית וחתך מינימלי ברשת.



ב. (12 נקודות) נתונות שלוש סדרות של טבעיים אי-שליליים $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ ו- $(c_1, \dots, c_n)$ כך ש- $a_i \leq b_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. תנו אלגוריתם יעיל הקובע האם קיים גרף דו-צדדי G שצדדיו הם $\{u_1, \dots, u_n\}$ ו- $\{v_1, \dots, v_n\}$ וכך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i \leq \deg_G(u_i) \leq b_i$ וגם $\deg_G(v_i) = c_i$.