

משך הבוחן שעתיים. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל ארבע השאלות. **בהצלחה!**

1. א. (13 נקודות) יהיו N ו- k טבעיים כך ש- k מחלק את N , ותהא $A = \{a_1, \dots, a_N\}$ קבוצה של מספרים שונים. תן אלגוריתם השוואות (יעיל ככל האפשר) המחלק את A ל- k קבוצות זרות $A_1, \dots, A_k$ כך ש- $|A_i| = N/k$ לכל $1 \leq i \leq k$, וכך שלכל $1 \leq i < j \leq k$ כל איבר ב- A_i קטן מכל איבר ב- A_j . נתח את סיבוכיות האלגוריתם.

ב. (12 נקודות) תן חסם תחתון למספר ההשוואות המירבי שיבצע אלגוריתם אופטימלי הפותר את הבעיה בסעיף א'.

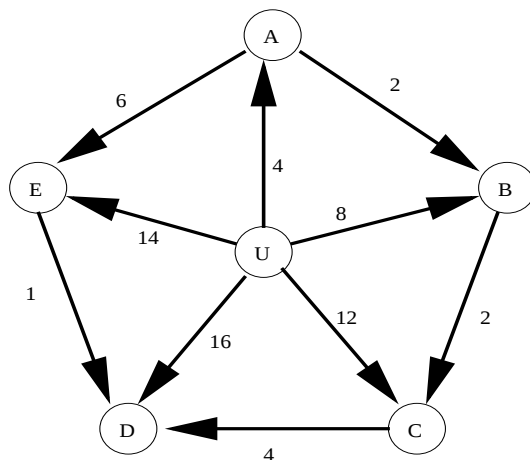
2. יהא $G = (V, E)$ גרף קשיר עם פונקצית משקל w על הצלעות. הסעיפים א' ו-ב' אינם תלויים זה בזה.

א. (13 נקודות) נניח כי לכל מעגל פשוט (שאינו חותך את עצמו) C ב- G ולכל שתי צלעות שונות $e, f \in C$ מתקיים $w(e) \neq w(f)$. הוכח כי G מכיל עץ פורש מינימלי יחיד.

ב. (12 נקודות) נתון כי G אינו מכיל שלוש צלעות שונות שוות משקל. מהו המספר המירבי של עצים פורשים מינימליים ב- G ?

3. א. (13 נקודות) תאר את אלגוריתם Dijkstra למציאת המרחקים והמסלולים המינימליים בין הקדקד U לבין כל שאר הקדקדים בגרף G עם משקלות אי-שליליים על הצלעות.

ב. (12 נקודות) הרץ את אלגוריתם Dijkstra על הגרף המכוון הבא:



4. א. (9 נקודות) מצא צופן רישא אופטימלי להתפלגות

$$p = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10} \right)$$

ב. (8 נקודות) נתון צופן רישא עם 10 מילים באורכים $\ell_1, \dots, \ell_{10}$, כאשר $\ell_i = i$ עבור $1 \leq i \leq 8$ ו- $\ell_9 = \ell_{10} = 9$. האם קיימת התפלגות $p = (p_1, \dots, p_{10})$ עבורה הצופן הנ"ל הוא אופטימלי? אם כן, מצא התפלגות p כזו.

ג. (8 נקודות) נתון צופן רישא עם 127 מילים אשר מתוכן 32 מילים הן באורך 6, 32 מילים הן באורך 7, ו- 63 הן באורך 8. האם קיימת התפלגות $p = (p_1, \dots, p_{127})$ עבורה הצופן הנ"ל הוא אופטימלי? אם כן, מצא התפלגות p כזו.