

מבחן באינפי' 3 27.2.25

משך המבחן 3 שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמקו תשובותיכם בקצור ובבהירות. ענו על כל חמש השאלות. **בהצלחה!**

סימונים: יהא f שדה וקטורי.
האנטגרל הקווי של f על מסילה γ יסומן ע"י $\int_{\gamma} f dr$.
אנטגרל השטף של f על משטח מכוון S יסומן ע"י $\int_S f d\sigma$.

1. א. (5 נקודות) תהא G קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^m$ ותהא $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$.
הגדירו: f דיפרנציאבילית בנקודה $a \in G$.

ב. (15 נקודות) יהא $M_n(\mathbb{R})$ מרחב המטריצות מסדר $n \times n$ מעל הממשיים.
נגדיר העתקה $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ ע"י $f(X) = X^3$.
לכל $A, X \in M_n(\mathbb{R})$ חשבו את $Df(A)(X)$.

2. תהא

$$M = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 x_2 x_3 x_4 = 24, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 30\}$$

ותהא $p = (1, 2, 3, 4) \in M$

א. (10 נקודות) תהא $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow M$ גזירה ברציפות המקיימת $f(0) = p$. תהא A המטריצה המייצגת של $Df(0)$. מצאו שני וקטורי שורה בלתי תלויים לינארית $u, v \in \mathbb{R}^4$ המקיימים $uA = vA = 0$.

ב. (10 נקודות) תהא $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ נתונה ע"י

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 18(x_1 + x_2) + c_3 x_3 + c_4 x_4.$$

נתון כי

$$g(p) = \max\{g(x) : x \in M\}.$$

מצאו את c_3, c_4 .

3. תהא $A = \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$ ויהא f השדה הוקטורי המוגדר על A ונתון ע"י

$$f(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(4x^2 + 4y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

א. (10 נקודות) תהא $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ שפת כדור היחידה עם נורמל המכוון לחוץ הכדור. חשבו את $\int_S f d\sigma$.

ב. (10 נקודות) מצאו שדה וקטורי גזיר $g(x, y, z)$ על A המקיים $\nabla \times g = f$, או הוכיחו שלא קיים שדה g כזה.

4. יהא S המשטח הנתון ע"י

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

עם נורמל היוצר זווית חדה עם ציר ה- z החיובי.

א. (10 נקודות) יהא $\lambda \in \mathbb{R}$ ויהא

$$f(x, y, z) = (\lambda xy - y^2 + z^2, 3x^2 + z^2, x^2 + y^2)$$

שדה וקטורי על $\mathbb{R}^3$ המקיים $\int_{\gamma} f dr = 0$ לכל מסילה סגורה γ המוכלת ב- S . מצאו את λ .

ב. (10 נקודות) יהא g השדה הוקטורי על $\mathbb{R}^3$ הנתון ע"י

$$g(x, y, z) = (\pi x \sin(\pi z) - x^3, e^{z^2} \cos(\pi x), (3x^2 + 1)z + \cos(\pi z)).$$

חשבו את $\int_S g d\sigma$.

5. יהא C העקום

$$C = \{(x, y, z) : y^2 + (z + x - x^3)^2 = 0\}$$

ותהא $U = \mathbb{R}^3 \setminus C$. יהא λ מספר ממשי ויהא f השדה הוקטורי המוגדר על U הנתון ע"י

$$f = \frac{((\lambda x^2 - 1)y, z + x - x^3, -y)}{y^2 + (z + x - x^3)^2}$$

יהיו $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow U$ העקומים הנתונים ע"י

$$\gamma_1(t) = \left(\frac{1}{2} + \cos t, \sin t, 0\right), \quad \gamma_2(t) = \left(\frac{1}{2} + 2 \cos t, \sin t, 0\right)$$

נתון כי f משמר מקומית ב- U .

א. (3 נקודות) ציירו (בערך) את העקום C ואת המסילות γ_1, γ_2 .

ב. (5 נקודות) מצאו את λ .

ג. (12 נקודות) עבור $i = 1, 2$ חשבו את $\int_{\gamma_i} f dr$.

הערה: אין צורך לתת הוכחה פורמלית להומוטופיה של מסילות, אפשר להסתפק בהסבר קצר. מעבר לכך, יש לנמק במדויק את כל צעדי החישוב.