1. א. f דיפרנציאבילית ב- $a \in G$ אם קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

כך ש
$$\lim_{0 \neq h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - Th|}{|h|} = 0$$

ג. נראה:
$$Df(A)(X) = A^2X + AXA + XA^2$$

הוכחה:

$$\frac{\| f(A+X) - f(A) - (A^2X + AXA + XA^2) \|}{\|X\|} =$$

$$\frac{\| (A+X)^3 - A^3 - (A^2X + AXA + XA^2) \|}{\|X\|} =$$

$$= \frac{\| X^2A + XAX + AX^2 + X^3 \|}{\|X\|} \leq \frac{\|X^2A\| + \|XAX\| + \|AX^2\| + \|X^3\|}{\|X\|}$$

$$\leq \frac{3\|A\| \|X\|^2 + \|X\|^3}{\|X\|} = 3\|A\| \|X\| + \|X\|^2 \xrightarrow[X \to 0]{} 0$$

2. א. נגדיר $h: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ע"י $h(x) = (x_1x_2x_3x_4 - 24, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 30)$.

אז
$$Dh(x) = \begin{bmatrix} x_2x_3x_4 & x_1x_3x_4 & x_1x_2x_4 & x_1x_2x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \end{bmatrix}.$$

הנחה $f(x) \in M$ אומרת כי $h(f(x)) = 0$ ולכן

$$0 = D(h \circ f)(0) = Dh(f(0))\, Df(0) = Dh(1,2,3,4) \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 12 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} A$$

u,v יכולים להיות כל שני וקטורים בלתי תלויים במרחב השורות

של $\begin{bmatrix} 24 & 12 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, למשל $u = (24,12,8,6)$. $v = (2,4,6,8)$

2. ג.

$$g(p) = \max\{g(x) : x \in M\} = \max\{g(x) : h(x) = 0\}$$

מאחר ו- $Dh(p) = \begin{bmatrix} 24 & 12 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ היא מטריצה מדרגה 2, ולכן

מכאן כופלי לגרנז' שקיימים λ_1, λ_2 כך ש-

$$(18, 18, c_3, c_4) = Dg(p) = [\lambda_1, \lambda_2]\, Dh(p) = [\lambda_1, \lambda_2] \begin{bmatrix} 24 & 12 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

לכן

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \ \lambda_2 = 3 \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} 24\lambda_1 + 2\lambda_2 = 18 \\ 12\lambda_1 + 4\lambda_2 = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c_3 = \left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot 8 + 3 \cdot 6 = 22, \quad c_4 = \left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 27$$

3.

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(4x^2+4y^2+z^2)^{3/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(4x^2+4y^2+z^2)^{3/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(4x^2+4y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{(4x^2+4y^2+z^2)^3}\Big((4x^2+4y^2+z^2)^{3/2} - x \cdot \tfrac{3}{2}(4x^2+4y^2+z^2)^{1/2} \cdot 8x$$
$$+ (4x^2+4y^2+z^2)^{3/2} - y \cdot \tfrac{3}{2}(4x^2+4y^2+z^2)^{1/2}\, 8y$$
$$+ (4x^2+4y^2+z^2)^{3/2} - z \cdot 3/2\, (4x^2+4y^2+z^2) \cdot 2z \Big)$$

$$= \frac{1}{(4x^2+4y^2+z^2)^{3/2}}\left(3(4x^2+4y^2+z^2)^{3/2} - (4x^2+4y^2+z^2)^{1/2} \cdot 3(4x^2+4y^2+z^2) \right)$$

$$= 0$$

א. יהי M האליפסואיד ~~[illegible]~~ $M = \{(x,y,z) : 4x^2+4y^2+z^2 = 1\}$

עם נורמל המכוון הלאה מהראשית.

המשך $T: [0,\pi]\times[0,2\pi] \to M$ הפרמטריזציה של M הנתונה ע"י:

$$T(\phi,\theta)=\left(\tfrac{1}{2}\sin\phi\cos\theta,\ \tfrac{1}{2}\sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi\right)$$

$$N_T(\phi,\theta)=\frac{\partial T}{\partial \phi}\times\frac{\partial T}{\partial \theta}=\sin\phi\left(\tfrac{1}{2}\sin\phi\cos\theta,\tfrac{1}{2}\sin\phi\sin\theta,\tfrac{1}{4}\cos\phi\right)$$

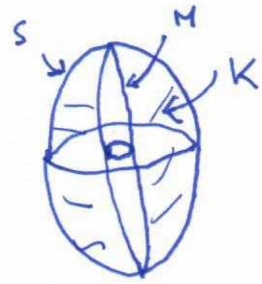
$$\int_T f\,d\sigma=\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} f(T,\phi)\cdot N_T(\phi,\theta)\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\sin\phi\cos\theta,\tfrac{1}{2}\sin\phi\sin\theta,\cos\phi\right)\cdot\sin\phi\left(\tfrac{1}{2}\sin\phi\cos\theta,\tfrac{1}{2}\sin\phi\sin\theta,\tfrac{1}{4}\cos\phi\right)}_{1}\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\tfrac{1}{4}\sin\phi\,d\phi\,d\theta=\frac{4\pi}{4}=\pi$$

נסמן K התחום

$$K=\left\{(x,y,z):\ \begin{matrix}x^2+y^2+z^2\le 1\\ 4x^2+4y^2+z^2\ge 1\end{matrix}\right\}$$



לפי משפט גאוס:

$$0=\int_K \operatorname{div} f=\int_{\partial K} f\,d\sigma=\int_S f\,d\sigma-\int_M f\,d\sigma$$

$$=\int_S f\,d\sigma-\pi \quad\Rightarrow\quad \int_S f\,d\sigma=\pi$$

ג. אם היה שדה g כך ש- $\nabla\times g=f$ אזי

$$0=\int_\emptyset g\,dr=\int_{\partial S} g\,dr=\int_S \nabla\times g\,d\sigma=\int_S f\,d\sigma=\pi$$

סתירה! לכן לא קיים שדה g כזה.

4. א. <u>טענה</u>: לכל $0 \neq (x_0,y_0,z_0) \in S$ מתקיים $\nabla\times f(x_0,y_0,z_0)\cdot(-x_0,-y_0,z_0)=0$ (*)

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה כי (*) לא מתקיים. בה"כ

$\varepsilon = \nabla\times f(x_0,y_0,z_0)\cdot(-x_0,-y_0,z_0) > 0$. מרציפות $\nabla\times f$ נובע כי קיים $r>0$

כך ש- $\nabla\times f(x,y,z)\cdot(-x,-y,z) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $(x,y,z)\in S_r = B\big((x_0,y_0,z_0),r\big)\cap S$.

נשים לב כי הנורמל ל-S בנק' (x,y,z) הוא

$$N(x,y,z) = \frac{(-x,-y,z)}{|(-x,-y,z)|}$$

לכן

$$0 \overset{\text{הנחה}}{=} \oint_{\partial S_r} f\,dr \overset{\text{סטוקס}}{=} \iint_{S_r} \nabla\times f \, d\sigma$$

$$= \iint_{(x,y,z)\in S_r} \nabla\times f(x,y,z)\cdot N(x,y,z) = \iint_{(x,y,z)\in S_r} \nabla\times f(x,y,z)\cdot\frac{(-x,-y,z)}{|(-x,-y,z)|} \geq$$

$$\iint_{(x,y,z)\in S_r} \frac{\varepsilon}{2\,|(-x,-y,z)|} > 0$$

סתירה. ■

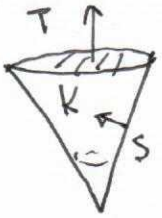
עתה

$$\nabla\times f = \begin{array}{c} \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \times \\ (\lambda xy - y^2 + z^2,\ 3x^2+z^2,\ x^2+y^2) \\ \hline (2(y-z),\ 2(z-x),\ 6x-\lambda x+2y) \end{array}$$

ולכן

$$0 = (\nabla\times f)\cdot(-x,-y,z) = -2x(y-z) - 2y(z-x) + z(6x-\lambda x+2y)$$

$$= 8xz - \lambda xz \implies \boxed{\lambda = 8}$$



4. ג.

יהי $T = \{(x,y,1) : x^2+y^2 \le 1\}$

ויהי $K = \{(x,y,z) : z^2 \ge x^2+y^2,\ 0 \le z \le 1\}$

אזי $\partial K = T - S$ ולכן

$$\int_K \operatorname{div} g \overset{\text{גאוס}}{=} \int_{\partial K} g\, d\sigma = \int_T g\, d\sigma - \int_S g\, d\sigma$$

לגבי:

$$\int_T g\, d\sigma = \int_{(x,y,1)\in T} g(x,y,1)\, d\sigma = \int_{x^2+y^2\le 1} g(x,y,1)\cdot(0,0,1)\, dx\, dy$$

$$= \int_{x^2+y^2\le 1} 3x^2\, dx\, dy = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} 3r^2\cos^2\theta\cdot r\, dr\, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta\cdot\int_{r=0}^{1} 3r^3\, dr$$

$$= \pi\cdot\frac{3}{4}.$$

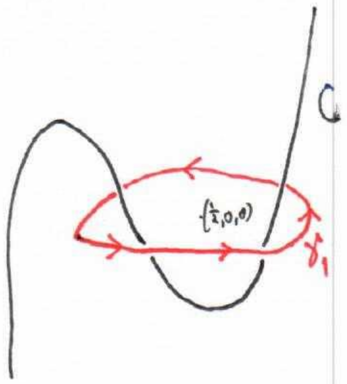
כמו כן

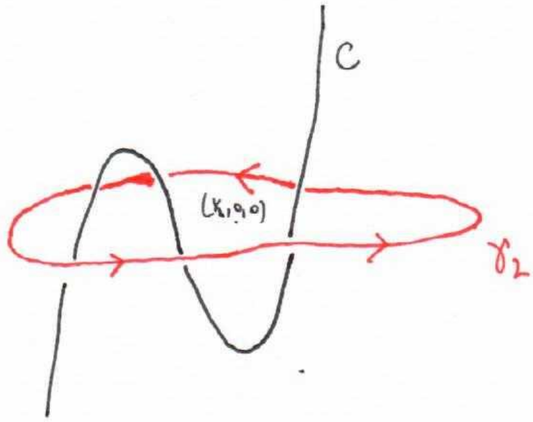
$$\operatorname{div} g = (\pi\sin\pi z - 3x^2) + 0 + \left((3x^2+1) - \pi\sin\pi z\right) = 1$$

ולכן $\int_K \operatorname{div} g = \operatorname{vol}(K) = \frac{\pi}{3}$. לכן

$$\int_S g\, d\sigma = \int_T g\, d\sigma - \int_K \operatorname{div} g = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{5\pi}{12}}$$

5. ב.





ג. f שדה משמר $\Longleftrightarrow$ $\nabla\times f=0$ לכן

$$0=\nabla\times f=\nabla\times\frac{\left((\lambda x^2-1)y,\ z+x-x^3,\ -y\right)}{y^2+(z+x-x^3)^2}$$

בפרט

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(\lambda x^2-1)y}{y^2+(z+x-x^3)^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{y^2+(z+x-x^3)^2}\right)$$

לכן

$$(\lambda x^2-1)y\cdot 2(z+x-x^3)=-y\cdot 2(z-x-x^3)(1-3x^2)$$

ולכן

$$\boxed{\lambda=3}$$

ד. המסילה γ_1 הומוטופית ב-U למסילה קבועה ולכן $\int_{\gamma_1} f\,dr=\boxed{0}$. המסילה γ_2 הומוטופית ל-

$$\Gamma(t)=(0,\cos t,\sin t)\qquad 0\le t\le 2\pi$$

ולכן

$$\int_{\gamma_2} f\,dr=\int_{\gamma_2}(-y,z,-y)\,dr=$$

$$=\int_{t=0}^{2\pi}(-\cos t,\sin t,-\cos t)\cdot(0,-\sin t,\cos t)=-\int_{t=0}^{2\pi}1=\boxed{-2\pi}$$