

מבחן באינפי' 3 23.3.25

משך המבחן 3 שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמקו תשובותיכם בקצור ובבהירות. ענו על כל חמש השאלות. **בהצלחה!**

סימונים: יהא f שדה וקטורי.
האנטגרל הקווי של f על מסילה γ יסומן ע"י $\int_{\gamma} f dr$.
אנטגרל השטף של f על משטח מכוון S יסומן ע"י $\int_S f d\sigma$.

1. נסמן ב- $M_n(\mathbb{R})$ את מרחב המטריצות הממשיות מסדר n על n . תהא $GL_n(\mathbb{R})$ קבוצת המטריצות ההפיכות ב- $M_n(\mathbb{R})$.

א. (15 נקודות) נגדיר $f : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ ע"י $f(X) = X^{-1}$.
לכל $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ו- $H \in M_n(\mathbb{R})$ חשבו את $Df(A)H$.

ב. (5 נקודות) האם קיימת פונקציה גזירה פעמיים ברציפות $g : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ כך שלכל $A, H \in M_2(\mathbb{R})$ מתקיים $Dg(A)H = AH$?
מצאו דוגמא ל- g כזו, או הוכיחו שלא קיימת g כזו.

2. יהא $\lambda \in \mathbb{R}$ ותהא $p = (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$. תהא $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ נתונה ע"י

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((2\lambda - 1) \sin x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4, 6x_1 + 2 \sin x_2 + 4x_3 + \lambda x_4).$$

נתון כי $\text{rank } Df(p) = 2$, וכן כי לא קיימת סביבה פתוחה $U \subset \mathbb{R}^2$ של $(0, 0)$ ופונקציה גזירה ברציפות $g = (g_1, g_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ כך ש- $g(0, 0) = (0, 0)$ וכך ש- $f(s, t, g_1(s, t), g_2(s, t)) = (0, 0)$ לכל $(s, t) \in U$.

א. (10 נקודות) מצאו את λ .

ב. (10 נקודות) הראו כי קיימת סביבה פתוחה $V \subset \mathbb{R}^2$ של $(0, 0)$ ופונקציה גזירה ברציפות $h = (h_1, h_2) : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ כך ש- $h(0, 0) = (0, 0)$ וכך ש- $f(h_1(s, t), h_2(s, t), s, t) = (0, 0)$ לכל $(s, t) \in V$. חשבו את $Dh(0, 0)$.

3. יהא $0 < a < 1$ ויהא T הטורוס המלא המתקבל מסיבוב הדיסקית

$$B = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - 1)^2 \leq a^2\}$$

הערה: שימו לב שאם מסובבים את הנקודה $(x, y, 0)$ סביב ציר ה- x בזווית ϕ כלפי מעלה, אזי הנקודה המתקבלת היא $(x, y \cos \phi, y \sin \phi)$.

א. (6 נקודות) מצאו פרמטריזציה של T ושל שפתו ∂T .

ב. (7 נקודות) חשבו את הנפח של T כפונקציה של a .

ג. (7 נקודות) חשבו את השטח של ∂T כפונקציה של a .

4. יהיו A, B, C קבועים. יהא T המשולש ב- $\mathbb{R}^3$ שקדקדיו הם $(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)$ עם נורמל המכוון הלאה מהראשית. יהא f השדה הווקטורי הנתון ע"י:

$$f(x, y, z) = (z - 2y + y^2 + Az^2, 2(x - z) + z^2, 2y - x + By^2).$$

נתון כי לכל תחום $S \subset T$ עם שפה $\gamma = \partial S$ שכוונה מושרה מכוון T מתקיים

$$\int_{\gamma} f \, dr = C \cdot \text{area}(S).$$

א. (10 נקודות) מצאו את A, B, C .

ב. (10 נקודות) יהא g השדה הווקטורי הנתון ע"י

$$g(x, y, z) = (1 + x(1 + e^y - \sin z), 1 + y(1 + \sin z - x^2), 1 + z(1 + x^2 - e^y)).$$

חשבו את $\int_T g \, d\sigma$.

5. תהא

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z - x)^2 + (x + y + z)^2 \neq 0\}.$$

נגדיר שני שדות וקטוריים f, g על U ע"י

$$f(x, y, z) = \frac{(2z + y, z - x, -2x - y)}{(z - x)^2 + 4(x + y + z)^2}$$

$$g(x, y, z) = \frac{(10x + 8y + 6z, 8(x + y + z), 6x + 8y + 10z)}{(z - x)^2 + 4(x + y + z)^2}$$

חישוב (שאפשר לקבלו כנתון) מראה כי $\nabla \times f = \nabla \times g = (0, 0, 0)$.

תהא $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$ המסילה הנתונה ע"י $\gamma(t) = (10 \cos t, 10 \sin t, 1)$.

א. (10 נקודות) חשבו את $\int_{\gamma} f \, dr$. קבעו האם f שדה משמר ב- U , ואם כן מצאו לו פונקציית פוטנציאל.

ב. (10 נקודות) חשבו את $\int_{\gamma} g \, dr$. קבעו האם g שדה משמר ב- U , ואם כן מצאו לו פונקציית פוטנציאל.

הערה: אין צורך לתת הוכחה פורמלית להומוטופיה של מסילות, אפשר להסתפק בהסבר קצר. מעבר לכך, יש לנמק במדויק את כל צעדי החישוב.