1. א. טענה: $\boxed{Df(A)H = -A^{-1}HA^{-1}}$

הוכחה: לכל $H \in M_n(\mathbb{R})$ המקיים $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$

(כאשר $\|\cdot\|$ היא הנורמה האופרטורית), מתקיים

$$(A+H)^{-1} = \left(A\left(I + A^{-1}H\right)\right)^{-1} = \left(I + A^{-1}H\right)^{-1} A^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(A^{-1}H\right)^k \cdot A^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left(A^{-1}H\right)^k A^{-1}$$

ולכן

$$\frac{\left\|f(A+H) - f(A) - \left(-A^{-1}HA^{-1}\right)\right\|}{\|H\|} = \frac{\left\|\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left(A^{-1}H\right)^k A^{-1}\right\|}{\|H\|}$$

$$\le \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \|A^{-1}\|^{k+1} \cdot \|H\|^k}{\|H\|} = \|H\| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{-1}\|^{k+3} \|H\|^k = O(\|H\|)$$

ב. טענה: לא קיימת g כזו.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת $g: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ דיפ' פעמיים ברציפות

כך ש- $Dg(A)H = AH$ לכל $A, H \in M_2(\mathbb{R})$.

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad g\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(X) & g_{12}(X) \\ g_{21}(X) & g_{22}(X) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{ij} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_{ij}}(x) \cdot h_{ij} & \sum_{ij} \frac{\partial g_{12}}{\partial x_{ij}}(x) h_{ij} \\ \sum_{ij} \frac{\partial g_{21}}{\partial x_{ij}}(x) h_{ij} & \sum_{ij} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_{ij}}(x) h_{ij} \end{bmatrix} \overset{\text{הגדרה}}{=} Dg(X)H \overset{\text{הנחה}}{=} XH = \begin{bmatrix} x_{11}h_{11} + x_{12}h_{21} & x_{11}h_{12} + x_{12}h_{22} \\ x_{21}h_{11} + x_{22}h_{21} & x_{22}h_{12} + x_{22}h_{22} \end{bmatrix}$$

נשווה למשל את הכניסות (1,1) בשני הצדדים ונקבל כי

$\sum_{ij} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_{ij}}(x) h_{ij} = x_{11}h_{11} + x_{12}h_{21}$. כלומר $\frac{\partial g_{11}}{\partial x_{21}} = x_{12}$, $\frac{\partial g_{11}}{\partial x_{12}} = 0$ $\Leftarrow$ $0 = \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_{21}\partial x_{12}} = \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_{12}\partial x_{21}} = 1$

סתירה.

2. f מק"מ $f(p)=(0,0)$ ו-

$$Df(x)=\begin{bmatrix}(2\lambda-1)\cos x_1 & 1 & \lambda & 1\\ 6 & 2\cos x_2 & 4 & \lambda\end{bmatrix}$$

ולכן

$$Df(p)=\begin{bmatrix}2\lambda-1 & 1 & \lambda & 1\\ 6 & 2 & 4 & \lambda\end{bmatrix}$$

א. אם $\det\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 4 & \lambda\end{bmatrix}\neq 0$ אזי לפי משפט הפונ' הסתומה היתה קיימת, בניגוד לנתון, סביבה $(0,0)\in U\subset\mathbb{R}^2$ ו $g=(g_1,g_2): U\to\mathbb{R}^2$ כך ש- g גזירה ברציפות $g(0,0)=(0,0)$! ו- $f(s,t,g_1(s,t),g_2(s,t))=(0,0)$ לכל $(s,t)\in U$.

לכן $\det\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 4 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-4$, $0=$ כלומר, $\lambda\in\{\pm 2\}$. אם $\lambda=2$ אזי $Df(p)=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 1\\ 6 & 2 & 4 & 2\end{bmatrix}$ בסתירה לנתון ש- $\mathrm{rk}\,Df(p)=2$.

לכן $\boxed{\lambda=-2}$ ולכן $Df(p)=\begin{bmatrix}-5 & 1 & -2 & 1\\ 6 & 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$

ב. לפי משפט הפונקציה הסתומה, מכיוון ש- $\det\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}=-16\neq 0$! הרי שקיימת סביבה $(0,0)\in V\subset\mathbb{R}^2$ ו- $h=(h_1,h_2):V\to\mathbb{R}^2$ גזירה ברציפות כך ש- $f(h_1(s,t),h_2(s,t),s,t)=0$ לכל $(s,t)\in V$.

ולפי כלל השרשרת

$$0=\left[\,Df(p)\,\right]\cdot\begin{bmatrix}Dh(0,0)\\ 1 \quad 0\\ 0 \quad 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}\cdot Dh(0,0)+\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}$$

ולכן

$$Dh(0,0)=-\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}=\boxed{\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}}$$

ב. פרמטריזציה של T:

$$g: [0,a]\times[0,2\pi]\times[0,2\pi]\to T$$

$$g(r,\theta,\phi)=\left(r\cos\theta,\ (1+r\sin\theta)\cos\phi,\ (1+r\sin\theta)\sin\phi\right)$$

פרמטריזציה של ∂T:

$$h: [0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\partial T$$

$$h(\theta,\phi)=g(a,\theta,\phi)$$

א.

$$Dg(r,\theta,\phi)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -(1+r\sin\theta)\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & (1+r\sin\theta)\cos\phi\end{bmatrix}$$

$$J_g(r,\theta,\phi)=\det Dg(r,\theta,\phi)=\cos\theta\, r\cos\theta(1+r\sin\theta)+r\sin\theta\sin\theta(1+r\sin\theta)$$

$$=r(1+r\sin\theta)$$

$$vol(T)=\int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r(1+r\sin\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi=\boxed{2\pi^2a^2}$$

ג.

$$N_h(\theta,\phi)=\frac{\partial h}{\partial\theta}\times\frac{\partial h}{\partial\phi}=(-a\sin\theta,\ a\cos\theta\cos\phi,\ a\cos\theta\sin\phi)\times(0,\ -(1+r\sin\theta)\sin\phi,\ (1+r\sin\theta)\cos\phi)$$

$$=\left(a\cos\theta(1+a\sin\theta),\ a\sin\theta(1+a\sin\theta)\cos\phi,\ a\sin\theta(1+a\sin\theta)\sin\phi\right)$$

$$area(\partial T)=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left|N_h(\theta,\phi)\right|d\phi\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}a(1+a\sin\theta)\,d\phi\,d\theta$$

$$=\boxed{4\pi^2a}$$

5. המסילה γ הומוטופית ב-U למסילה $\Gamma : [0, 2\pi] \to U$

הנתונה ע"י

$$\Gamma(t) = (-2\sin t, \cos t + 2\sin t, 0)$$

א. מהשמור המקומי של f

$$\int_\gamma f\,dr = \int_\Gamma f\,dr = \int_{t=0}^{2\pi} f(\Gamma(t))\cdot\Gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \frac{(\cos t + 2\sin t, 2\sin t, 4\sin t - (\cos t + 2\sin t))}{(2\sin t)^2 + 4\cos^2 t}\cdot(-2\cos t, -\sin t + 2\cos t, 0)\,dt$$

$$\frac{1}{4}\int_{t=0}^{2\pi}\left(-2\cos^2 t - 4\cos t\sin t - 2\sin^2 t + 4\sin t\cos t\right)dt = \frac{1}{4}\int_{t=0}^{2\pi}(-2)\,dt = \boxed{-\pi}$$

בפרט f אינו משמר ב-U.

ב. משמור המקומי של g

$$\int_\gamma g\,dr = \int_\Gamma g\,dr = \int_{t=0}^{2\pi} g(\Gamma(t))\,\Gamma'(t)\,dt = \int_{t=0}^{2\pi} 0\,dt = 0$$

$h(x,y,z) = \boxed{\log\left((z-x)^2 + 4(x+y+z)^2\right)}$ היא פונקציה פוטנציאל לשדה g.

4.

$$f(x,y,z) = \left(z-2y+y^2+Az^2,\ 2(x-z)+z^2,\ 2y-x+By^2\right).$$

א. וקטור $N=(2,1,2)$ הוא נורמל ל-T

צ"ל

$$C\,\text{area}(S) = \int_{\partial S=\gamma} f\,dr = \int_S \nabla\times f\,d\sigma \quad (*)$$

כדי ש-(*) יתקיים לכל משטח $S\subset T$, צריך כי $(\nabla\times f)\cdot N$ יהיה קבוע. צ"ל

$$\nabla\times f = (4+2By-2z,\ 2+2Az,\ 4-2y)$$

$$(\nabla\times f)\cdot N = (4+2By-2z,\ 2+2Az,\ 4-2y)\cdot(2,1,2)$$

$$= 18+(4B-4)y+(2A-4)z$$

לכן $\boxed{A=2,\ B=1}$, ואז $\nabla\times f = (4+2y-2z,\ 2+4z,\ 4-2y)$

$$C\,\text{area}(S) \overset{\text{נתון}}{=} \int_{\partial S=\gamma} f\,dr \overset{\text{סטוקס}}{=} \int_S \nabla\times f\,d\sigma = \text{area}(S)\cdot\frac{(\nabla\times f)\cdot N}{|N|}$$

$$= \text{area}(S)\cdot\frac{18}{3} = \text{area}(S)\cdot 6 \Rightarrow \boxed{C=6}$$

ב. נראה $K=\{(x,y,z):\ x,y,z\ge 0,\ x+\frac{y}{2}+z\le 1\}$ כאשר $\partial K = T\cup S_x\cup S_y\cup S_z$

$S_x = \{(x,y,z)\in K:\ x=0\}$ normal $= -e_1$

$S_y = \{(x,y,z)\in K:\ y=0\}$ " $= -e_2$

$S_z = \{(x,y,z)\in K:\ z=0\}$ " $= -e_3$

$\operatorname{div} g = 3$ לכן

$$1 = 3\cdot\text{vol}(K) = \int_T g + \int_{S_x} g\,d\sigma + \int_{S_y} g\,d\sigma + \int_{S_z} g\,d\sigma = \int_T g - (\text{area}(S_x)+\text{area}(S_y)+\text{area}(S_z))$$

$$= \int_T g\,d\sigma - \frac{5}{2} \Rightarrow \int_T g\,d\sigma = \boxed{\frac{7}{2}}$$