מבחן בקומבינטוריקה ־ 13.2.26

משך המבחן 3 שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקיצור ובבהירות. ענה על כל חמש השאלות. **בהצלחה!**

סימונים: $[n]=\{1,\ldots,n\}$. $\mathbb{Z}=$ קבוצת המספרים השלמים.
$\mathbb{Z}^d=\{(x_1,\ldots,x_d): 1\le i\le d$ **לכל** $x_i\in\mathbb{Z}\}$.

1. נתון מלאי לא מוגבל של שבעה סוגים שונים של מוטות באורך 2, ומלאי לא מוגבל של שישה סוגים שונים של מוטות באורך 3.

נסמן ב־ a_n את מספר התרנים באורך n שאפשר להרכיב ממוטות אלה. שימו לב כי

$$a_0=1, a_1=0, a_2=7, a_3=6, a_4=49, a_5=84.$$

א. (7 נקודות) מצאו k ו־ $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ כך ש־ $a_n=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_{n-i}$ לכל $n\ge k$.

ב. (7 נקודות) מצאו ביטוי פשוט (שאינו מכיל את סימן הסכום) ל־ a_n.

ג. (6 נקודות) מצאו ביטוי פשוט (שאינו מכיל את סימן הסכום) לפונקציה היוצרת $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

2. יהא $n>2m$ ותהא E_m קבוצת m הצלעות הבאות:

$$E_m=\big\{\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2m-3,2m-2\},\{2m-1,2m\}\big\}.$$

א. (10 נקודות) חשבו את מספר העצים על קבוצת הקדקדים $[n]$ המכילים את כל הצלעות ב־ E_m.

ב. (10 נקודות) חשבו את מספר העצים על קבוצת הקדקדים $[n]$ שאינם מכילים אף אחת מהצלעות ב־ E_m.

3. **א.** (12 נקודות) תהא $A\subset\mathbb{Z}^2$ קבוצה שגודלה $|A|=26$. הראו כי קיימים $u\ne v\in A$ כך ש־ $\frac{2u+3v}{5}\in\mathbb{Z}^2$.

ב. (8 נקודות) תהא $B\subset\mathbb{Z}^2$ קבוצה שגודלה $|B|=14$. הראו כי קיימים $u\ne v\in B$ כך שלפחות אחד מהתנאים הבאים מתקיים: $\frac{2u+3v}{5}\in\mathbb{Z}^2$ או $\frac{2u-3v}{5}\in\mathbb{Z}^2$.

4. יהא $G=(V,E)$ גרף דו־צדדי שצדדיו $A=\{a_1,\dots,a_n\}, B=\{b_1,\dots,b_m\}$.
לקבוצה $I\subset A$ נסמן ב־ $\Gamma(I)$ את קבוצת השכנים של I ב־ B (כלומר את כל האיברים $b\in B$ כך שקיים $a\in I$ עבורו $\{a,b\}\in E$).

א. (6 נקודות) נסחו את משפט Hall.

ב. (14 נקודות) נתון כי $|\Gamma(I)|\geq 2|I|$ לכל $I\subset A$. הוכיחו כי קיימות קבוצות $C_1\subset\Gamma(\{a_1\}),\dots,C_n\subset\Gamma(\{a_n\})$ כך ש־ $|C_i|=2$ לכל $1\leq i\leq n$ וכך ש־ $C_i\cap C_j=\emptyset$ לכל $1\leq i\neq j\leq n$.

5. יהא P פיאון ב־ $\mathbb{R}^3$ עם V קדקדים, E צלעות ו־ F פיאות. נתון כי P אינו מכיל פיאות משולשות ואינו מכיל פיאות מרובעות.

א. (10 נקודות) הוכיחו כי $3E\leq 5V-10$.
הערה: אפשר להשתמש ללא הוכחה בנוסחת אוילר. אם משתמשים בתוצאה אחרת שהראנו בכיתה, יש להוכיחה במלואה.

ב. (10 נקודות) נניח כי $3E=5V-10$ וכי מספר הפיאות המחומשות של P הוא 22. מצאו את V,E,F.