1. א. $k=3$ $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ ל- $n \geq 3$.

ג. הפולינום המתאים לנוסחת הנסיגה ב-א. הוא

$$y^3 - 7y - 6 = (y+1)(y+2)(y-3)$$

לכן $a_n = A(-1)^n + B(-2)^n + C\cdot 3^n$

למציאת A,B,C יש לפתור את המערכת

$$(A,B,C) = \frac{1}{20}(-5,16,9) \Leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

לכן $a_n = \frac{1}{20}\left(-5\cdot(-1)^n + 16\cdot(-2)^n + 9\cdot 3^n\right)$

ד.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 7x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = 1 + 7x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(7a_{n-2} + 6a_{n-3})x^n$$

$$= 1 + 7x^2 + 7x^2(f(x)-1) + 6x^3 f(x) = 1 + (7x^2 + 6x^3) f(x)$$

לכן

$$f(x) = \frac{1}{1 - 7x^2 - 6x^3}$$

2. א. אם F יער על $[n]$ עם רכיבי קשירות $V_1,\dots,V_k$, אזי מס' העצים על $[n]$ המכילים את F הוא $|V_1|\cdots|V_k|\, n^{k-2}$

יהי F היער שמגדיר E_m. אזי $k = n-m$ ו- $|V_1| = \dots = |V_m| = 2$, $|V_{m+1}| = \dots = |V_{n-m}| = 1$. לכן מס' העצים על $[n]$ המכילים את E_m הוא

$$|V_1|\cdots|V_k|\, n^{k-2} = 2^m n^{n-m-2}$$

2. ב. נסמן ב- A_i את משפחת העצים המכילים את הצלע $\{2i-1,2i\}$.

לפי נוסחת ההכלה וההדחה וסעיף א

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} 2^k n^{n-k-2}.$$

לכן

מס' העצים שאינם מכילים אף צלע מ- E_m $= n^{n-2} - \left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} 2^k n^{n-k-2}$

$$n^{n-2} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(-\frac{2}{n}\right)^k = n^{n-2}\left(1-\frac{2}{n}\right)^m = n^{n-m-2} (n-2)^m$$

3. א. אם $|A| \geq 26$ אז קיימים $u \neq v \in A$ כך ש $u \equiv v \pmod 5$

ולכן $2u+3v \equiv_5 2u+3u \equiv_5 5u$

ולכן $\frac{2u+3v}{5} \in \mathbb{Z}^2$

ג. נציין בחלוקה $\mathbb{Z}_5^2 = \{(0,0)\} \cup \{\{w,-w\}\}_{0 \neq w \in \mathbb{Z}_5^2}$, זו חלוקה ל- 13 חלקים. לכן אם $|B| = 14$ אז קיימים $u \neq v \in B$ כך ש- $\{u \pmod 5, v \pmod 5\} \subseteq \{w,-w\}$ עבור $w \in \mathbb{Z}_5^2$ כלשהו.

אם $u \equiv_5 v \equiv_5 w$ אז כמו קודם $\frac{2u+3v}{5} \in \mathbb{Z}^2$

אחרת $u \equiv_5 w$, $v \equiv_5 -w$, כלומר $w \equiv_5 -v$ ואז

$$\frac{2u-3v}{5} = \frac{2u+3u}{5} = u \in \mathbb{Z}^2.$$

4. ב. תהי $A' = \{a_1', \dots, a_n'\}$ קבוצה זרה ל- $A \cup B$. נגדיר גרף דו-צדדי $G' = (V', E')$ בצדדים $A \cup A'$ ו- B

$$E' = E \cup \{\{a_i', b_j\} : \{a_i, b_j\} \in E\}.$$

4ג. מהתנאי נובע כי $|\Gamma_{G'}(I)| \geq |I|$ לכל

$I \subset A \cup A'$. לכן לפי משפט Hall קיים זיווג מושלם של $A \cup A'$

ב-G': $\{a_1, b_{i_1}\}, \dots, \{a_n, b_{i_n}\}, \{a'_1, b_{j_1}\}, \dots, \{a'_n, b_{j_n}\}$

נסמן $C_1 = \{b_{i_1}, b_{j_1}\}, \dots, C_n = \{b_{i_n}, b'_{j_n}\}$

אזי $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ זרות בזוגות ו- $C_i \subset \Gamma_G(a_i)$ ו- מצאנו.

5. א. נסמן ב- F_i את מספר הפאות של P שבהן i צלעות.

נתון כי $F_3 = F_4 = 0$. אזי

$$2|E| = |\{(e,f) : e \subset f \,,\, f \text{ פאה של } P \,,\, e \text{ צלע}\}|$$

$$= \sum_{i=3}^{\infty} i F_i = \sum_{i=5}^{\infty} i F_i \geq 5 \cdot \sum_{i=5}^{\infty} F_i = 5F \qquad (*)$$

לכן

$$2 = V - E + F \leq V - E + \frac{2|E|}{5} = V - \frac{3E}{5}$$

$\Leftarrow$ $3E \leq 5(V-2)$.

ג. $3E = 5(V-2)$ $\Leftarrow$ יש שוויון ב-$(*)$, כלומר $F_i = 0$ לכל $i \neq 5$.

לכן $\boxed{F = F_5 = 22}$ ולכן $V - E = -F + 2 = -20$

ולכן $-60 = 3 \cdot (V - E) = 3V - 5(V-2) = -2V + 10$

$\Leftarrow$ $\boxed{V = 35}$ ו- $\boxed{E = \frac{5}{3}(V-2) = 55}$